

**Распространение световых волн  
в турбулентной атмосфере**

**И. Колоколов, В. Лебедев,**

**И. Воинцев, А. Короткевич,**

**Институт теоретической физики  
имени Л.Д.Ландау РАН**

**Школа Современная гидродинамика**

**Черноголовка**

**29 августа 2024 года**

Атмосфера всегда в той или иной мере турбулентна в силу большого значения числа Рейнольдса

$$Re = LV/\nu.$$

Здесь  $L$  – масштаб, на котором возбуждается турбулентность  $V$  – характерная скорость на этом масштабе,  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$ .

Турбулентность – хаотическое состояние со случайной скоростью  $\vec{v}(t, \vec{r})$ , которое следует характеризовать статистически, то есть через средние величины, которые мы будем обозначать угловыми скобками. Средние могут вычисляться по времени и/или по пространству, где возбуждается турбулентность. Например  $\langle \vec{v} \rangle = 0$ ,  $\langle v^2 \rangle \neq 0$ .

На масштабах много меньше  $L$  турбулентность является однородной и изотропной. Традиционно свойства турбулентности характеризуются парной корреляционной функцией скорости

$$\langle \vec{v}(t, \vec{r}_1 + \vec{r}) \vec{v}(t, \vec{r}_1) \rangle,$$

которая в силу упомянутых свойств зависит только от абсолютной величины  $r$  вектора  $\vec{r}$ .

Корреляционная функция представляется в виде интеграла Фурье

$$\int \frac{dk}{2\pi} \exp(ikr) E(k),$$

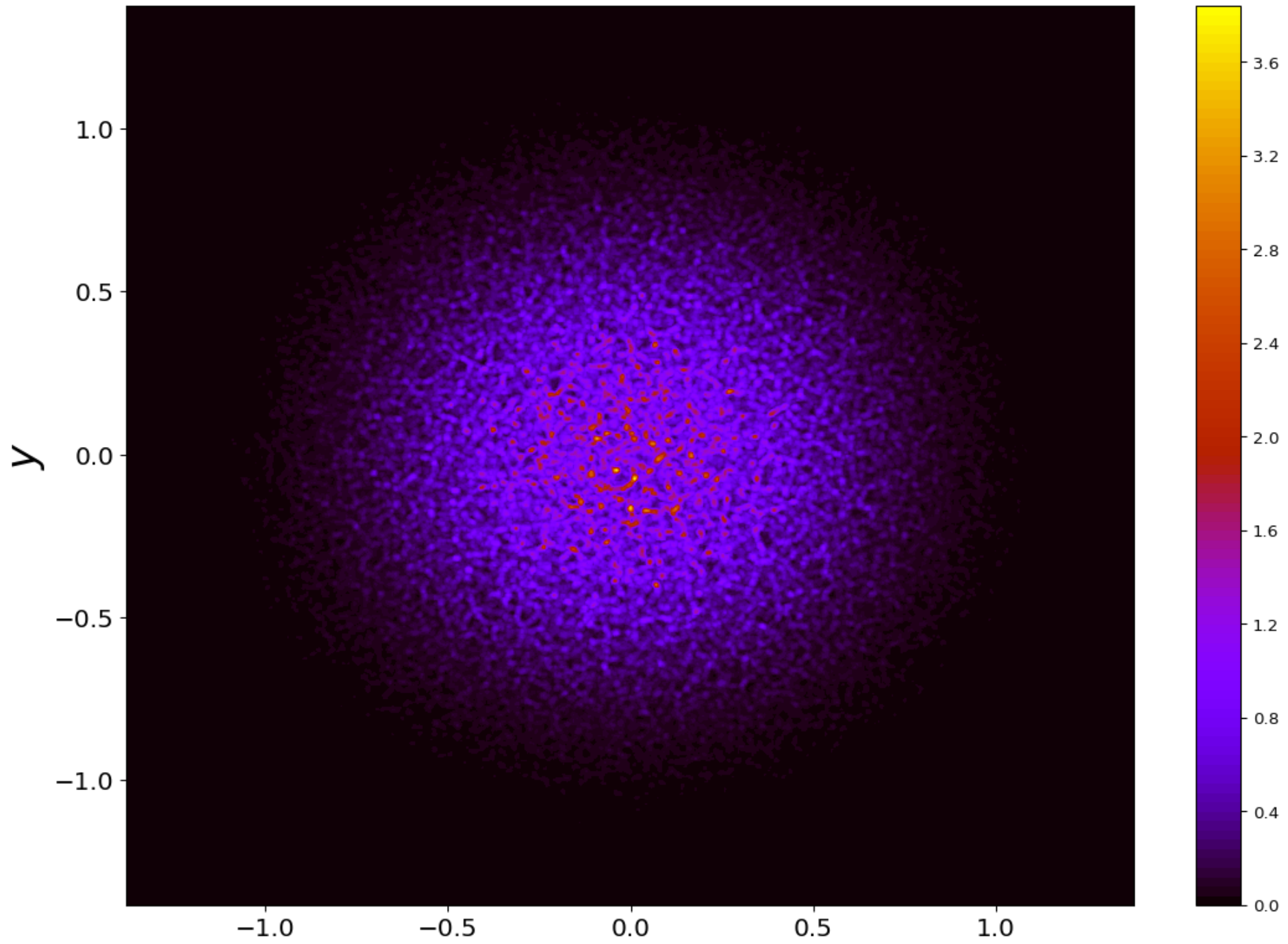
где  $E(k)$  называется спектром турбулентности. Эта величина обладает степенным поведением  $E(k) \propto k^{-5/3}$ , такой спектр называется Колмогоровским. Он неплохо соответствует наблюдениям.

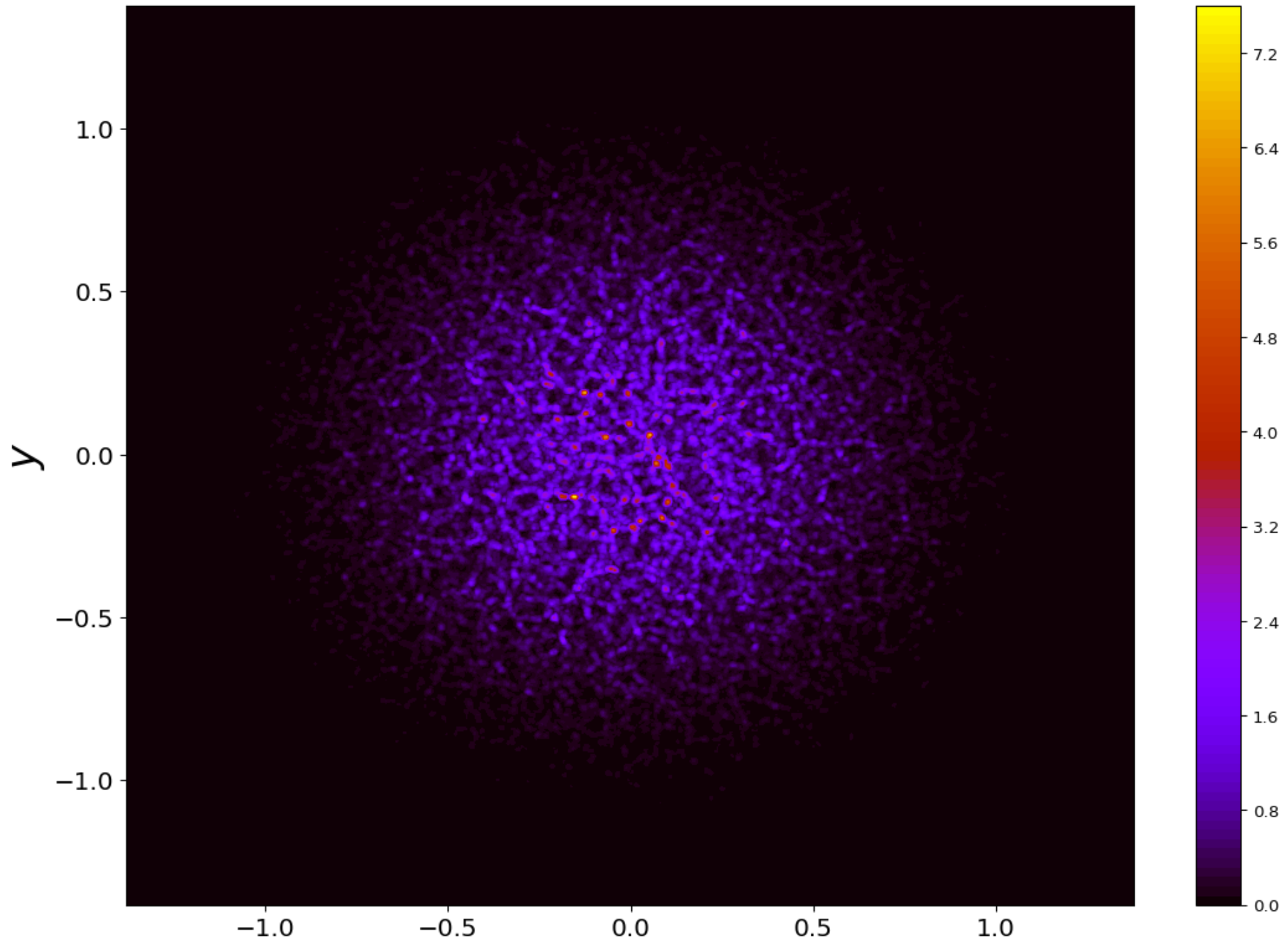
Колмогоровский спектр соответствует тому, что за счет нелинейности движения, генерируемые на масштабе  $L$ , порождают движения все меньшего и меньшего масштаба, пока этот процесс не остановится за счет вязкости. Это сопровождается передачей энергии с масштаба  $L$  в малые масштабы: каскад энергии.

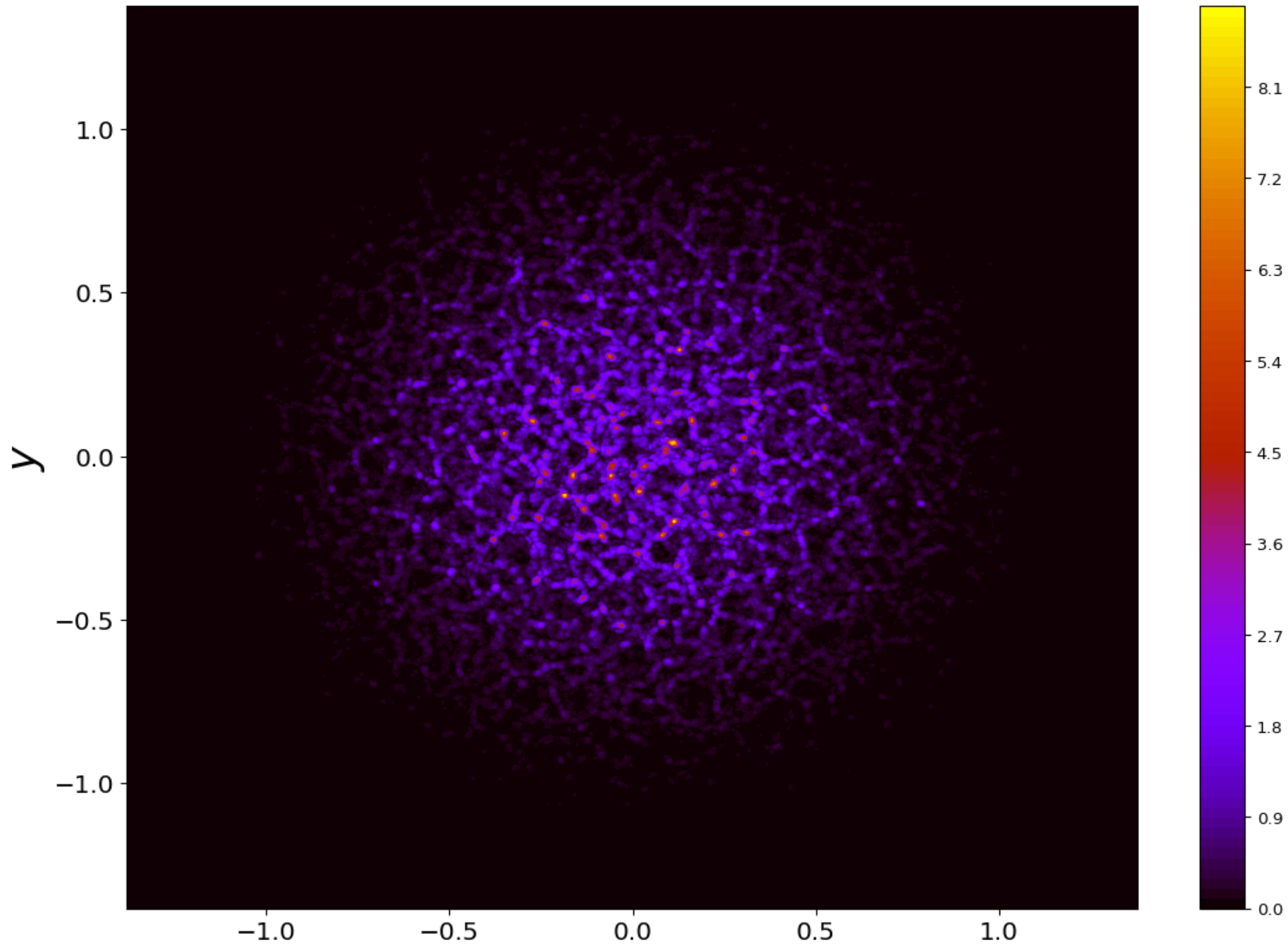
Хаотические изменения (флуктуации) скорости сопровождаются флуктуациями давления, которые обладают тем же самым Колмогоровским спектром, поскольку мелкомасштабные флуктуации давления пропорциональны мелкомасштабным флуктуациям скорости. То же справедливо для флуктуаций показателя преломления, пропорционального плотности газа.

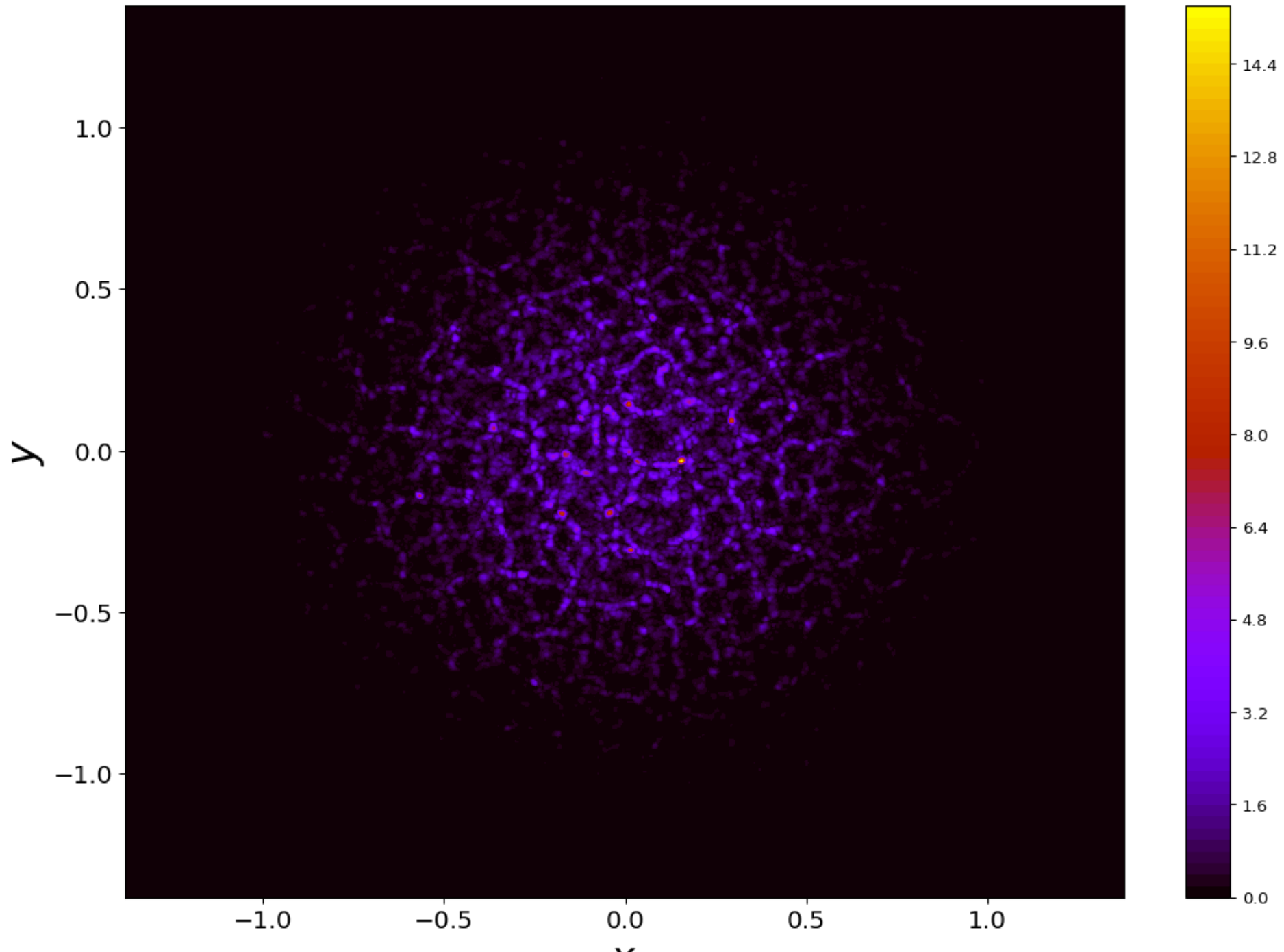
Лазерный луч, распространяющийся в атмосфере, дифрагирует на флуктуациях показателя преломления и в результате искажается. Постепенно он разваливается на спеклы. Проиллюстрируем характер этих искажений на примере луча, который имел первоначально Гауссов профиль. Приведены профили интенсивности в поперечной плоскости при удалении от источника.

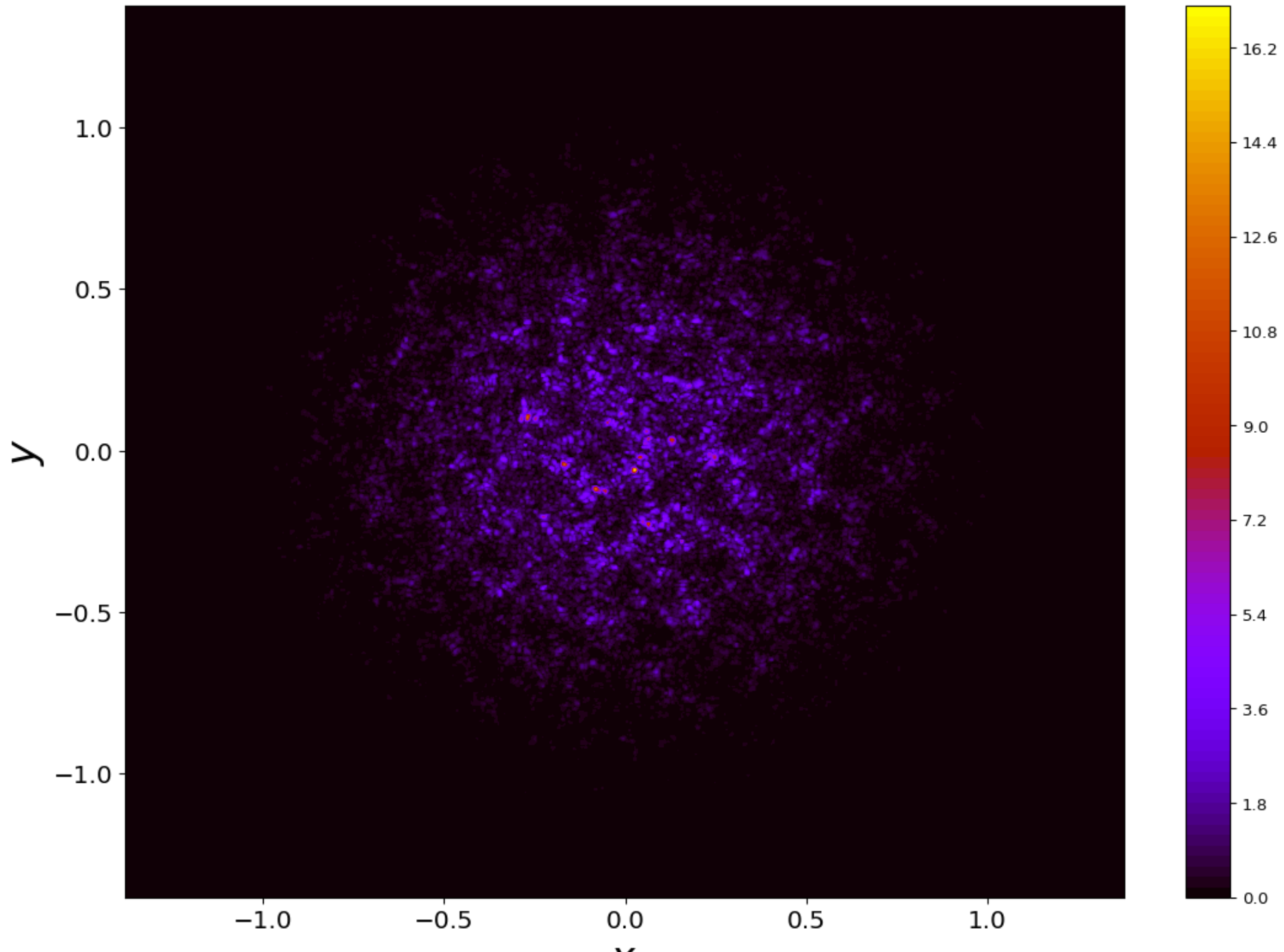












Для теоретического описания распространения световой волны следует использовать уравнение на огибающую  $\Psi$ , которая определяет электрическое поле волны, равное

$$\text{Re} [\Psi \exp(ik_0z - i\omega_0t)].$$

Волна распространяется вдоль оси  $Z$ ,  $k_0$  – волновой вектор,  $\omega_0$  – частота. Вообще говоря,  $\Psi$  – вектор.

Огибающая  $\psi$  зависит от времени и координат  $x, y, z$ . За счет большой скорости света при прохождении луча состояние атмосферы не успевает измениться. Скажем, для прохождения  $3 \text{ km}$  требуется  $10^{-5} \text{ s}$ . Поэтому  $\psi$  адиабатически подстраивается под текущее состояние атмосферы, которое определяется турбулентным движением.

Уравнение на огибающую можно получить из уравнений Максвелла, оно имеет вид

$$i\partial_z\Psi + \frac{1}{2k_0}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\Psi + k_0\nu\Psi = 0.$$

Здесь  $\nu$  – флуктуация показателя преломления. В силу адиабатичности в этом уравнении нет производной по времени, хотя  $\nu$  от времени зависит.



Флуктуация  $\nu$  является случайной величиной, которую следует описывать статистически, в терминах средних. Мы отсчитываем  $\nu$  от среднего значения показателя преломления, поэтому  $\langle \nu \rangle = 0$ . Нас интересует эволюция  $\Psi$  вдоль оси  $Z$ , когда свет быстро пробегает большое расстояние. Поэтому  $\nu$  быстро меняется вдоль оси  $Z$ .

Из-за  $\nu$  огибающая  $\Psi$  искажается по сравнению со случаем свободного распространения. Если эти искажения невелики, то поправку к решению свободного уравнения  $\delta\Psi$  можно записать в виде пространственного интеграла от  $\nu$ . Поэтому в силу центральной предельной теоремы поправка  $\delta\Psi$  обладает Гауссовой статистикой.

Напомним, что случайная величина  $\xi$  обладает Гауссовой статистикой, если ее плотность вероятности равна

$$P(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \xi_0} \exp(-\xi^2 / \xi_0^2),$$

где  $\xi_0$  – некоторая константа. Вероятность найти  $\xi$  в интервале  $d\xi$  равна  $P(\xi)d\xi$ , а интеграл  $\int P(\xi)d\xi$  (полная вероятность) равен единице.

Величину  $\nu$  можно считать коротко коррелированной вдоль оси  $Z$ , поэтому

$$\langle [\nu(x, y, z) - \nu(x', y', z')]^2 \rangle \\ \propto \delta(z - z') [(x - x')^2 + (y - y')^2]^{5/6},$$

где показатель степени определяется Колмогоровским спектром. Он нарушается, когда расстояние между точками становится меньше вязкой длины, типично  $10^{-4}$  m.

Уравнение на огибающую  $\Psi$  и свойство короткой корреляции  $\nu$  вдоль оси  $Z$  позволяют получить замкнутое дифференциальное уравнение на парную корреляционную функцию

$$F(\vec{r}_1, \vec{r}_2, z) = \langle \Psi(\vec{r}_1, z) \Psi^*(\vec{r}_2, z) \rangle,$$

где  $\Psi^*$  — величина, комплексно сопряженная к  $\Psi$ , а  $\vec{r} = (x, y)$ .

Это уравнение имеет вид

$$\partial_z F = \frac{i}{2k_0} (\nabla_1^2 - \nabla_2^2) F - D |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{5/3} F,$$

где  $\nabla^2$  – двумерный Лапласиан, а константа  $D$  зависит от мощности турбулентных пульсаций. Вообще говоря,  $D$  является функцией  $z$ . Отметим нелокальность уравнения. Тем не менее, оно допускает подробное исследование.

Например, для случая начальной плоской волны

$$F \propto \exp \left[ - \int^z d\zeta D(\zeta) |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^{5/3} \right].$$

Мы видим, что по мере распространения луча, когда растёт значение интеграла по  $\zeta$ , уменьшается длина корреляции огибающей. Это следствие нарастающего эффекта дифракции на флуктуациях показателя преломления.

Аналогичным образом можно получить уравнения на более высокие корреляционные функции огибающей. Например, на четырехточечную корреляционную функцию

$$\langle \Psi(\vec{r}_1, z) \Psi(\vec{r}_2, z) \Psi^*(\vec{r}_3, z) \Psi^*(\vec{r}_4, z) \rangle.$$

К сожалению, исследование этих уравнений наталкивается на значительные технические сложности.



В дальнейшем мы сосредоточимся на исследовании статистических свойств интенсивности электромагнитной волны  $I = |\psi|^2$ . К сожалению, нельзя найти замкнутое уравнение на  $I$ . Поэтому мы неизбежно должны сначала исследовать огибающую  $\psi$ , а затем уже использовать результаты для анализа статистики  $I$ .

Как показывают приведенные выше картинки, по мере распространения луча зависимость  $I$  от координат  $x, y$  становится все более неоднородной. Длину, на которой эта неоднородность становится существенной, мы будем называть длиной Рытова. На расстояниях, меньше и больше длины Рытова статистические свойства  $I$  существенно различны.

На расстояниях меньше длины Рытова волна слабо искажается за счет случайной дифракции. В этом случае  $I$  близко к значению для свободного распространения волны, а поправка за счет дифракции

$$\delta I = \psi^* \delta \psi + \delta \psi^* \psi,$$

обладает Гауссовой статистикой, поскольку ей обладают  $\delta \psi$  и  $\delta \psi^*$ .

На расстояниях больше длины Рытова можно сказать, что  $\Psi$  формируется за счет интерференции сигналов от многих случайных центров дифракции. В силу центральной предельной теоремы  $\Psi$  приобретает Гауссову статистику

$$P(\Psi) \propto \exp(-|\Psi|^2/I_0).$$

Здесь  $P$  – плотность вероятности.

В показателе этой экспоненты стоит не что иное, как  $I = |\psi|^2$ . Поэтому для интенсивности плотность вероятности имеет вид

$$P(I) = I_0^{-1} \exp(-I/I_0).$$

Таким образом, мы приходим к Пуассоновой плотности вероятности для интенсивности в выбранной точке.

Случайная величина  $\nu$  входит в уравнение на  $\psi$

$$i\partial_z\psi + \frac{1}{2k_0}\nabla^2\psi + k_0\nu\psi = 0,$$

как фактор при  $\psi$ . В этом случае можно ожидать аномально высокой вероятности больших значений  $\psi$ . Удобно описывать эту вероятность в терминах интенсивности  $I = |\psi|^2$ .

Аномально большим значениям некоторой величины, у нас  $I$ , соответствуют так называемые хвосты плотности вероятности  $P$ . Форма хвостов не может быть установлена на основе “тела”  $P$ , описывающего типичные события. Чтобы найти форму хвоста  $P(I)$ , необходимо провести специальное исследование конфигураций  $\nu$  дающих большие  $I$  и провести их оптимизацию.

Обычно форма хвоста плотности вероятности определяется так называемой “растянутой” экспонентой

$$P(I) \propto \exp(-CI^\beta),$$

где  $C$  – некоторая константа, а  $\beta$  – показатель. Чем меньше  $\beta$ , тем “жирнее” хвост. Изредка встречаются степенные хвосты.



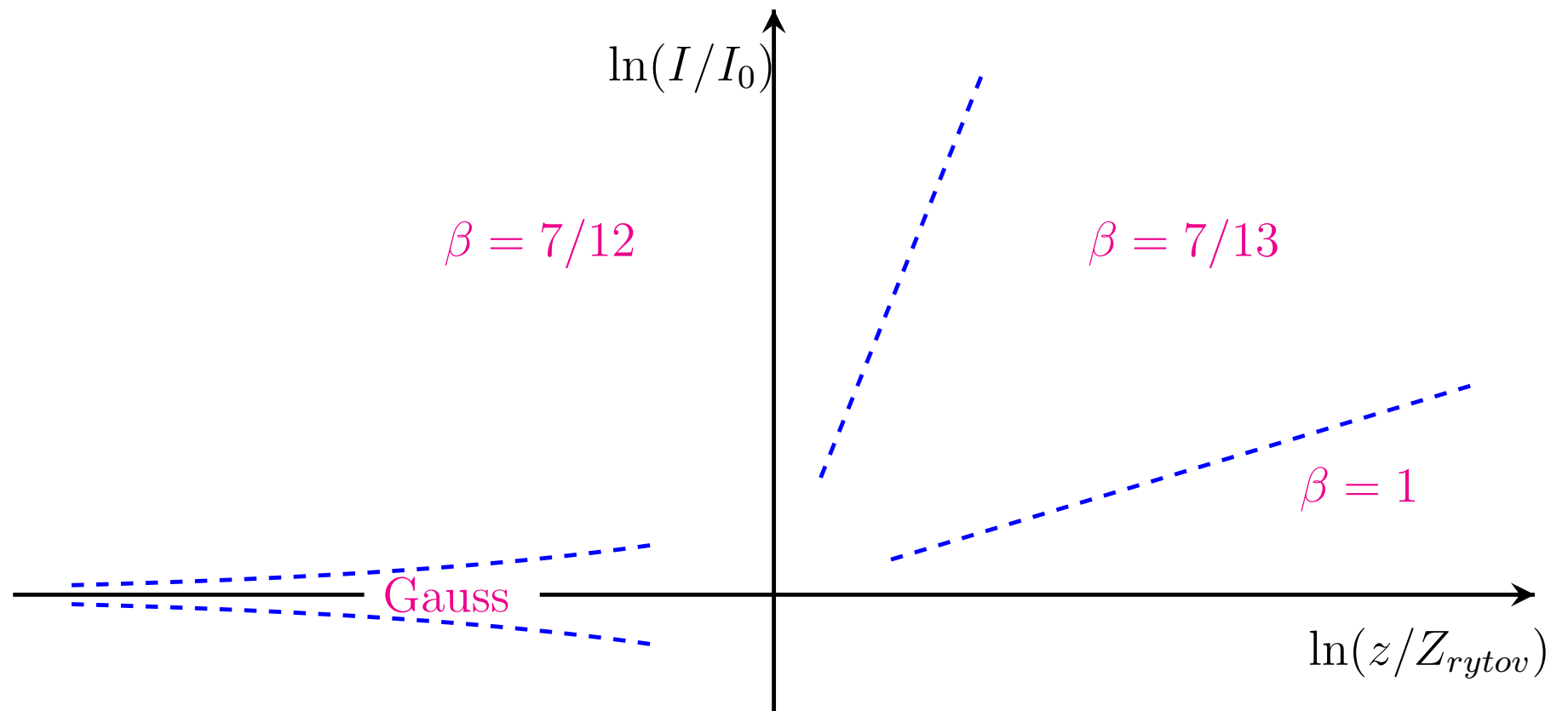
Свойства хвостов плотности вероятности можно переформулировать в терминах высоких моментов

$$\langle I^n \rangle = \int_0^\infty dI P(I) I^n.$$

Для хвоста с показателем  $\beta$  момент пропорционален  $\exp(\beta^{-1} n \ln n)$  для больших значений  $n$ . Для степенных хвостов высокие моменты вообще не существуют.

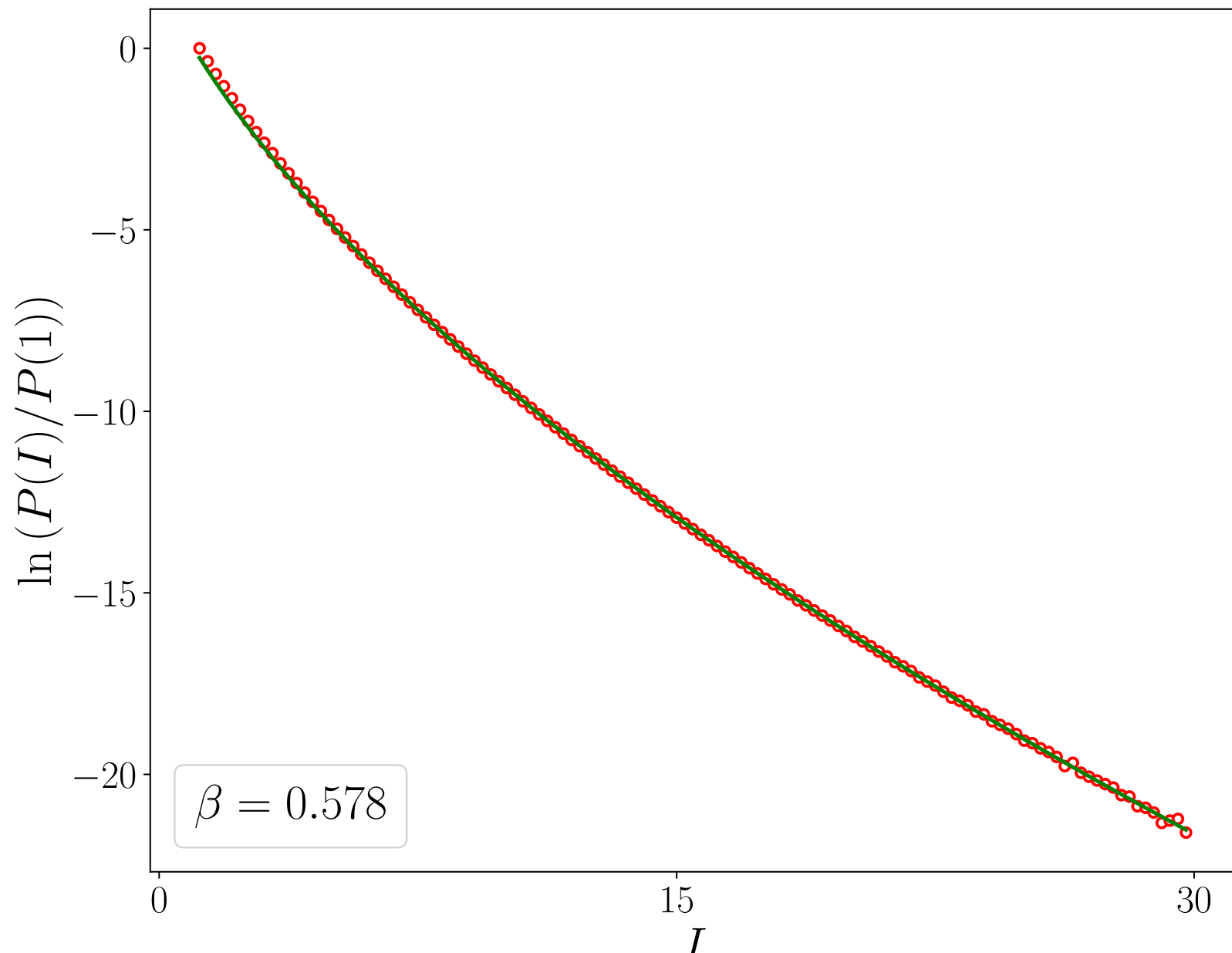
Мы провели исследование высоких моментов  $I$  на основе уравнения на  $\psi$ . Мы установили, что основной вклад в эти моменты дают конфигурации  $\nu$ , которые можно назвать случайными линзами. Оценка вероятности возникновения этих линз привела нас к хвостам  $P(I)$ , которые характеризуются “растянутыми” экспонентами.

В задаче имеется даже два таких хвоста. Первый из них реализуется при длинах порядка длины Рытова,  $\beta = 7/12$ . Второй из них реализуется при длинах много больше длины Рытова,  $\beta = 7/13$ . Оба показателя меньше единицы, то есть дают аномально большую вероятность. Общая картина отражена на приведенной диаграмме.



Мы производим численное моделирование распространения лазерного пучка в турбулентной атмосфере. Флуктуации показателя преломления моделируются одним или несколькими тонкими экранами, на каждом из которых  $\nu$  испытывает случайный скачок со статистикой, определяемой спектром Колмогорова. Схема традиционна.

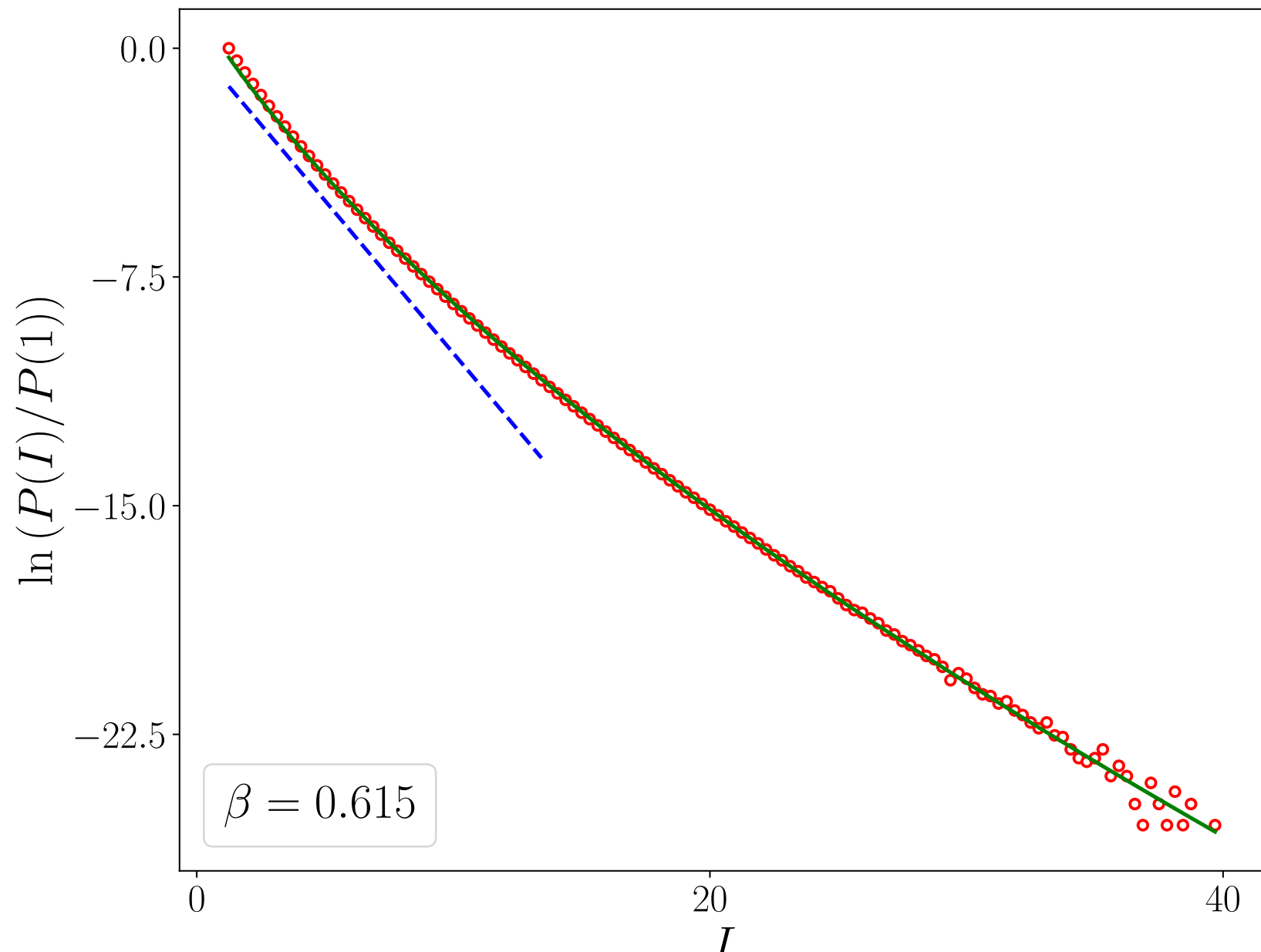
Нас интересуют хвосты  $P(I)$ . Проблема в том, чтобы накопить достаточное количество данных. Для этой цели используется множество реализаций. Мы представляем результаты для одного экрана и длине  $z/z_{rytov} = 0.75$ . Красные круги извлечены из найденных численно гистограмм. Широкий диапазон.



Полученные данные могут быть обработаны с тем, чтобы извлечь  $\beta$ . Используя интерполяционную формулу, мы находим  $\beta = 0.578$ , близкое к  $\beta = 7/12 = 0.583$ . Черная кривая на рисунке получена по интерполяционной формуле с найденным значением  $\beta$ . Хорошее совпадение.



Для сравнения мы представляем результаты для одного экрана и длине  $z/z_{\text{рытов}} = 4$ . Мы наблюдаем начало экспоненциального хвоста, то есть  $\beta = 1$ . Далее мы видим значительное отклонение от экспоненциального хвоста, которое свидетельствует о формировании хвоста с большим значением  $\beta$ . Соответствует.



We conclude that our theoretical scheme correctly reflects the features of the problem. We are going to compare our results with real experimental data in atmosphere. Our theoretical scheme can be generalized for more complicated objects. For example, we can examine correlation functions or statistics of energies of the speckles.

Работа продолжается.

Спасибо за внимание!!!