Спектры волновой турбулентности на поверхности воды.

А. О. Короткевич

Центр инженерной физики, Сколтех, Москва, Россия.
A.Korotkevich@Skoltech.ru
ИТФ им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Россия.

30-е августа, 2024,

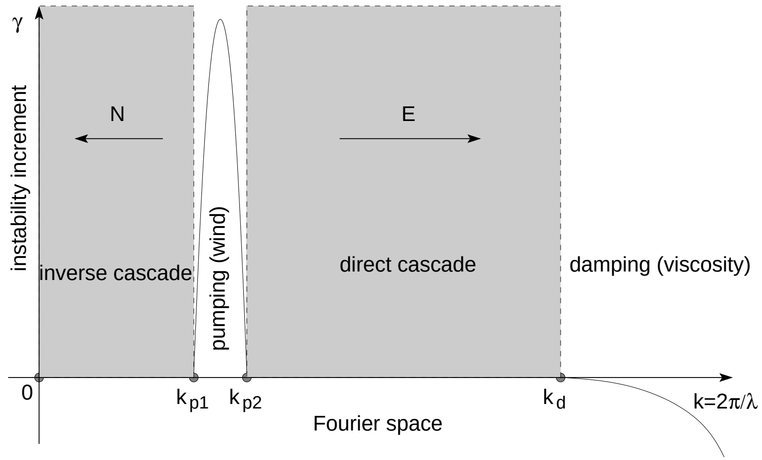
Школа «Современная гидродинамика 2024».

Skoltech Center for Engineering Physics

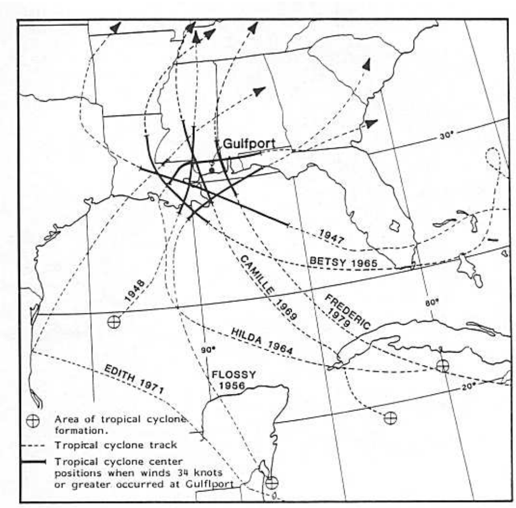
Волновая турбулентность: вовлечены разные масштабы

Волновая турбулентность: вовлечены разные масштабы

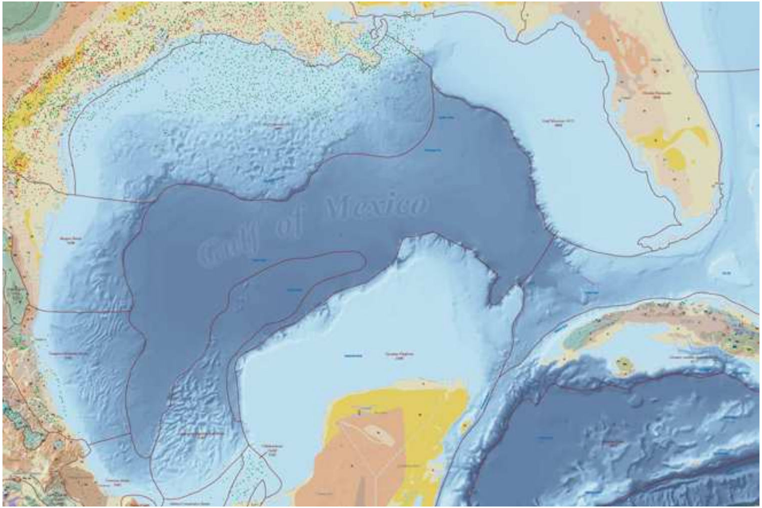
Идеи Ричардсона-Колмогорова



Почему это важно?

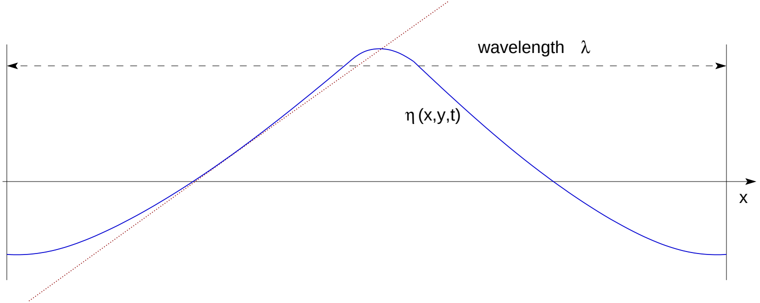


Цель предсказания ветрового волнения



Волны на воде. Формулировка задачи.

Рассмотрим потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины со свободной поверхностью. Мы используем стандартные обозначения для потенциала скорости $\phi(\vec{r}, z, t)$, $\vec{r} = (x, y)$; $\vec{v} = \nabla\phi$ и отклонения поверхности по высоте $\eta(\vec{r}, t)$.



Крутизна поверхности: $\mu = \sqrt{\langle|\nabla\eta(\vec{r}, t)|^2\rangle} \approx 0.1$ — средний наклон.

Благодаря несжимаемости потенциал скорости ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla \cdot \vec{v} = 0$:

$$\nabla^2 \phi = 0 \tag{1}$$

в области занимаемой жидкостью:

$$-\infty < z < \eta(\vec{r}), \quad \vec{r} = (x, y). \tag{2}$$

Граничные условия на потенциал следующие:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)\Bigg|_{z=\eta} = \frac{\partial \phi}{\partial z}\Bigg|_{z=\eta}, \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 \right)\Bigg|_{z=\eta} - g\eta = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\phi_z|_{z \to -\infty} = 0. \tag{4}$$

Здесь $\eta = \eta(x, y, t)$ — это отклонение поверхности по вертикали от состояния покоя $(z = 0)$.

Энергия системы

Полная энергия системы может быть представлена в следующем виде:

$$H = T + U,$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{\rho}{2} \int \mathrm{d}^2 r \int\limits_{-\infty}^{\eta} (\nabla \phi)^2 \mathrm{d}z,$$

Потенциальная энергия в поле тяжести:

$$U = \frac{\rho}{2} g \int \eta^2 \mathrm{d}^2 r,$$

здесь g — это ускорения свободного падения. Отнормируем к единичной плотности $\rho = 1$.

Разложение гамильтониана.

В. Е. Захаровым (1967) было показано, что при таких допущениях жидкость является гамильтоновской системой:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta\eta},$$

где $\psi = \phi(\vec{r}, \eta(\vec{r}, t), t)$ — это потенциал скорости на поверхности жидкости. Для вычисления значения ψ надо решить уравнение Лапласа в области с изменяющейся формой поверхности η. Можно упростить ситуацию используя разложение гамильтониана (или оператора Дирихле-Неймана) по степеням «крутизны» (здесь $\Delta = \nabla^2$ и $\hat{k} = \sqrt{-\Delta}$):

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2}\int \left(g\eta^2 + \psi\hat{k}\psi\right) \mathrm{d}^2 r + \\ +\frac{1}{2}\int \eta\left[|\nabla\psi|^2 - (\hat{k}\psi)^2\right] \mathrm{d}^2 r + \\ +\frac{1}{2}\int \eta(\hat{k}\psi)\left[\hat{k}(\eta(\hat{k}\psi)) + \eta\Delta\psi\right] \mathrm{d}^2 r. \end{aligned}$$

Полный вывод с капиллярностью можно найти в статье KAO, Phys. Rev. Lett., **130**, 264002 (2023); arXiv:2211.16567

Динамические уравнения.

В этом случае динамические уравнения принимают следующий вид:

$$
\begin{aligned}
\dot\eta &= \hat{k}\psi - (\nabla(\eta\nabla\psi)) - \hat{k}[\eta\hat{k}\psi] + \\
&\quad + \hat{k}(\eta\hat{k}[\eta\hat{k}\psi]) + \tfrac{1}{2}\Delta[\eta^2\hat{k}\psi] + \tfrac{1}{2}\hat{k}[\eta^2\Delta\psi], \\
\dot\psi &= -g\eta - \tfrac{1}{2}\left[(\nabla\psi)^2 - (\hat{k}\psi)^2\right] - \\
&\quad - [\hat{k}\psi]\hat{k}[\eta\hat{k}\psi] - [\eta\hat{k}\psi]\Delta\psi.
\end{aligned}
$$

Введём преобразование Фурье:

$$
\psi_{\vec{k}} = \frac{1}{2\pi}\int \psi_{\vec{r}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{r}} \mathrm{d}^2 r, \quad \eta_{\vec{k}} = \frac{1}{2\pi}\int \eta_{\vec{r}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{r}} \mathrm{d}^2 r.
$$

Нормальные переменные

$\psi(\vec{r},t)$ и $\eta(\vec{r},t)$ — это действительные функции, $\Rightarrow \psi_{\vec{k}} = \psi^*_{-\vec{k}}, \eta_{\vec{k}} = \eta^*_{-\vec{k}}$ — эрмитова симметрия.

Удобно ввести канонические (нормальные) переменные $a_{\vec{k}}$ следующим образом:

$$a_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2k}}\eta_{\vec{k}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{k}{2\omega_k}}\psi_{\vec{k}}, \text{ где } \omega_k = \sqrt{gk}.$$

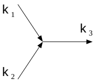
$$\mathrm{i}\dot{a}_{\vec{k}} = \frac{\delta H}{\delta a^*_{\vec{k}}} \text{ — уравнения Гамильтона,}$$

$a_{\vec{k}}$ — элементарное возбуждение (плоская волна).

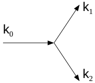
Гамильтонинан в нормальных переменных.

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \int \omega_k |a_{\vec{k}}|^2 \mathrm{d}\vec{k}, \\
H_1 &= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi}\int C^{\vec{k}_0}_{\vec{k}_1\vec{k}_2}(a_{\vec{k}_1}a_{\vec{k}_2}a^*_{\vec{k}_0} + a^*_{\vec{k}_1}a^*_{\vec{k}_2}a_{\vec{k}_0})\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_0)\mathrm{d}\vec{k}_1\mathrm{d}\vec{k}_2\mathrm{d}\vec{k}_0 + \ldots, \\
H_2 &= \frac{1}{4}\frac{1}{(2\pi)^2}\int D_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4} a_{\vec{k}_1}a_{\vec{k}_2}a^*_{\vec{k}_3}a^*_{\vec{k}_4}\delta(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k}_4)\mathrm{d}\vec{k}_1\mathrm{d}\vec{k}_2\mathrm{d}\vec{k}_3\mathrm{d}\vec{k}_4 + \ldots
\end{aligned}
$$

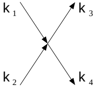
$a_{\vec{k}_1}a_{\vec{k}_2}a^*_{\vec{k}_3}$



$a_{\vec{k}_0}a^*_{\vec{k}_1}a^*_{\vec{k}_2}$



$a_{\vec{k}_1}a_{\vec{k}_2}a^*_{\vec{k}_3}a^*_{\vec{k}_4}$



Резонансные условия

Давайте посмотрим, что значит "слабая нелинейность" и какие у этого последствия:

$$(a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} a^*_{\vec{k}_0} + a^*_{\vec{k}_1} a^*_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_0})\delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_0)$$

$$a_{\vec{k}}(t) = A_{\vec{k}}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_k t} \Rightarrow a^*_{\vec{k}_0} a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} = A^*_{\vec{k}_0} A_{\vec{k}_1} A_{\vec{k}_2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_{k_0} - \omega_{k_1} - \omega_{k_2})t}$$

Резонансные условия для трёхволного взаимодействия (слияние и распад):

$$\omega_{k_0} = \omega_{k_1} + \omega_{k_2}, \quad \vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2.$$

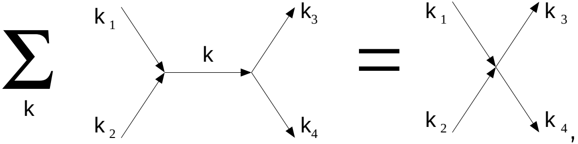
Резонансные условия для четырёхволнового взаимодействия (рассеяние два в два):

$$\omega_{k_1} + \omega_{k_2} = \omega_{k_3} + \omega_{k_4}, \quad \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4.$$

Каноническое преобразование

Преобразование к нормальной форме (Пуанкаре)

Закон дисперсии (линейной) в случае гравитационных волн на глубокой воде $\omega_k = \sqrt{gk}$ является "не распадным" и уравнения: $\omega_{k_1} = \omega_{k_2} + \omega_{k_3}$, $\vec{k}_1 = \vec{k}_2 + \vec{k}_3$ не имеют действительных нетривиальных решений. Это означает, что в пределе малой нелинейности кубические члены гамильтониана могут быть исключены подходящим каноническим преобразованием (показана только одна диаграмма): $a(\vec{k}, t) \longrightarrow b(\vec{k}, t)$.



$$
\begin{aligned}
H_0 &= \int \omega_k |b_{\vec{k}}|^2 \mathrm{d}\vec{k}, \\
H_1 &= 0, \\
H_2 &= \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^2}\int T_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4} b^*_{\vec{k}_1} b^*_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_3} b_{\vec{k}_4} \delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3 - \vec{k}_4)\mathrm{d}\vec{k}_1\mathrm{d}\vec{k}_2\mathrm{d}\vec{k}_3\mathrm{d}\vec{k}_4.
\end{aligned}
$$

Парная корреляционная функция

Для статистического описания стохастического волнового поля можно использовать парную (авто-)корреляционную функцию

$$\langle a_{\vec{k}} a^*_{\vec{k}'} \rangle = n_k \delta(\vec{k} - \vec{k}').$$

Функция $n_{\vec{k}}$ является измеримой величиной, прямо связанной с наблюдаемой корреляционными функциями. Например, из определения $a_{\vec{k}}$ можно получить следующее выражение:

$$I_k = \langle |\eta_{\vec{k}}|^2 \rangle = \frac{k}{2\omega_k}(n_k + n_{-k}).$$

Для вывода кинетического уравнения описывающего гравитационные волны на воде удобно ввести другую корреляционную функцию:

$$\langle b_{\vec{k}} b^*_{\vec{k}'} \rangle = N_k \delta(\vec{k} - \vec{k}').$$

Связь между корреляционными функциями

Соотношение между $n_{\vec{k}}$ и $N_{\vec{k}}$ довольно простое (в случае глубокой воды):

$$\frac{n_{\vec{k}} - N_{\vec{k}}}{n_{\vec{k}}} \simeq \tilde{\mu}^2,$$

где $\tilde{\mu} = k_{sp}\sqrt{\langle|\eta|^2\rangle} \simeq \mu$, здесь η — это отклонение поверхности. В случае слабой турбулентности $\mu \ll 1$, поэтому относительная разница меньше нескольких процентов. Во всех вычислениях мы будем пользоваться более простой функцией $n_{\vec{k}}$ для анализа.

Кинетическое уравнение для волн

Корреляционная функция $N_{\vec{k}}$ подчиняется кинетическому уравнению (Нордгейм, 1928; Пайерлс, 1929; Хассельманн, 1962)

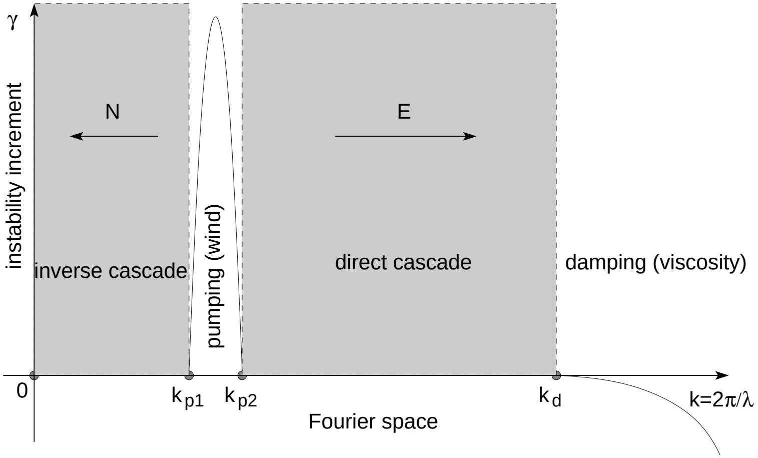
$$\frac{\partial N_{\vec{k}}}{\partial t} = st(N, N, N) + f_p(\vec{k}) - f_d(\vec{k}),$$

Здесь:

$$st(N, N, N) = 4\pi \int \left| T_{\vec{k},\vec{k}_1}^{\vec{k}_2,\vec{k}_3} \right|^2 N_{\vec{k}} N_{\vec{k}_1} N_{\vec{k}_2} N_{\vec{k}_3} \left(\frac{1}{N_{\vec{k}}} + \frac{1}{N_{\vec{k}_1}} - \frac{1}{N_{\vec{k}_2}} - \frac{1}{N_{\vec{k}_3}} \right) \times$$
$$\times \delta(\vec{k} + \vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \delta(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \mathrm{d}\vec{k}_1 \mathrm{d}\vec{k}_2 \mathrm{d}\vec{k}_3.$$

Данное кинетическое уравнение и его модификации являются основой для всех моделей предсказания ветрового волнения. Вся физика содержится в T и ω_k.

Идеи Ричардсона-Колмогорова: масштабы и потоки.



Решения Колмогорова-Захарова (3D жидкость, 2D поверхность, изотропные гравитационные волны, глубокая вода).

Прямой каскад энергии (от больших масштабов к малым, Захаров и Филоненко, 1967)

$$N_k^{(1)} = C_1 P^{1/3} k^{-\frac{2\beta}{3} - d} = C_1 P^{1/3} k^{-4}. \tag{5}$$

Обратный каскад волнового действия (от малых масштабов к большим, Захаров и Заславский, 1988)

$$N_k^{(2)} = C_2 Q^{1/3} k^{-\frac{2\beta - \alpha}{3} - d} = C_2 Q^{1/3} k^{-23/6} \approx const \;\; k^{-3.83}. \tag{6}$$

Аргумент Fjortoft-a: куда текут потоки?

Давайте рассмотрим ситуация, когда на масштабе k_f энергия и волновое действие вбрасывается в систему, а на масштабах k_- и k_+ они сгорают.

$$\varepsilon = \int \varepsilon_{\vec{k}} \mathrm{d}\vec{k}, \quad n = \int n_{\vec{k}} \mathrm{d}\vec{k}.$$

В слабонелинейном приближении:

$$\varepsilon_{\vec{k}} \approx \omega_k n_{\vec{k}}.$$

Для простоты пусть $k_- \ll k_f \ll k_+$. Соответственно, есть два инерционных интервала (k_-, k_f) и (k_f, k_+), где есть только перенос сохраняющихся величин потоком, за счёт нелинейного взаимодействия волн. В динамическом равновесии вся вбрасываемая энергия и всё вбрасываемое волновое действие сгораю:

$$\dot{\varepsilon}_{k_f} + \dot{\varepsilon}_{k_-} + \dot{\varepsilon}_{k_+} = 0, \quad \dot{n}_{k_f} + \dot{n}_{k_-} + \dot{n}_{k_+} = 0.$$

Потоки величин в инерционных интервалах постоянны (динамическое равновесие). Давайте посмотрим на большие масштабы k_- (помним, что $\varepsilon_{\vec{k}} \approx \omega_k n_{\vec{k}}$).

$$\dot{n}_{k_+} = -\dot{n}_{k_f} - \dot{n}_{k_-} \quad \dot{\varepsilon}_{k_f} + \dot{\varepsilon}_{k_-} + \dot{\varepsilon}_{k_+} = 0, \; \omega_{k_f}\dot{n}_{k_f} + \omega_{k_-}\dot{n}_{k_-} - \omega_{k_+}\dot{n}_{k_f} - \omega_{k_+}\dot{n}_{k_-} = 0.$$

Отсюда получаем для соотношения скоростей "горения"волнового действия ($k_- \ll k_f \ll k_+$):

$$\dot{n}_{k_f} = \frac{\omega_{k_+} - \omega_{k_-}}{\omega_{k_f} - \omega_{k_+}}\dot{n}_{k_-}, \quad \dot{n}_{k_f} \approx \frac{\omega_{k_+}}{-\omega_{k_+}}\dot{n}_{k_-}.$$

То есть вбрасываемое волновое действие сгорает в основном в области больших масштабов. На малых масштабах k_+ аналогичные рассуждения дают:

$$\dot{n}_{k_f} \approx \frac{\omega_{k_+}}{-\omega_{k_f}}\dot{n}_{k_+}, \quad \dot{\varepsilon}_{k_f} \approx -\dot{\varepsilon}_{k_+}.$$

Таким образом почти вся вбрасываемая в систему энергия сгорает в области малых масштабов.

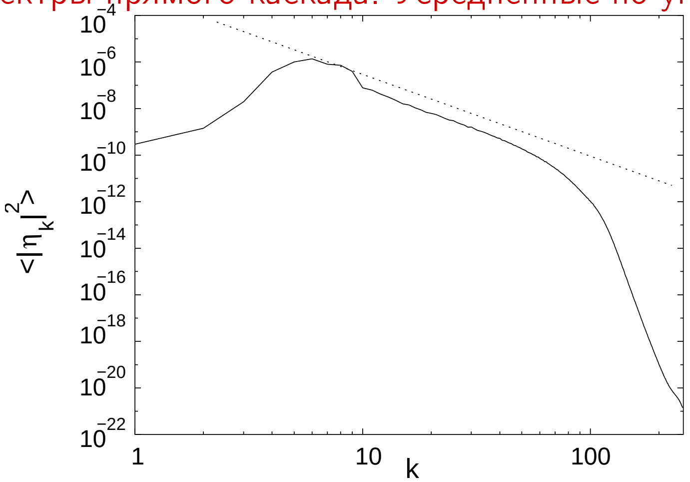
Параметры численной схемы.

Давайте добавим накачку и затухание в динамические уравнения:

$$\begin{aligned}
\dot{\eta} &= \hat{k}\psi - (\nabla(\eta\nabla\psi)) - \hat{k}[\eta\hat{k}\psi] + \\
&+ \hat{k}(\eta\hat{k}[\eta\hat{k}\psi]) + \frac{1}{2}\Delta[\eta^2\hat{k}\psi] + \frac{1}{2}\hat{k}[\eta^2\Delta\psi] - F^{-1}[\gamma_k\eta_{\vec{k}}], \\
\dot{\psi} &= -g\eta - \frac{1}{2}\left[(\nabla\psi)^2 - (\hat{k}\psi)^2\right] - \\
&- [\hat{k}\psi]\hat{k}[\eta\hat{k}\psi] - [\eta\hat{k}\psi]\Delta\psi - F^{-1}[\gamma_k\psi_{\vec{k}}] + F^{-1}[f_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}R_{\vec{k}}(t)}], \\
f_k &= 4F_0\frac{(k-k_{p1})(k_{p2}-k)}{(k_{p2}-k_{p1})^2}; \\
\gamma_k &= \gamma_0(k-k_d)^2, \quad k > k_d.
\end{aligned}$$

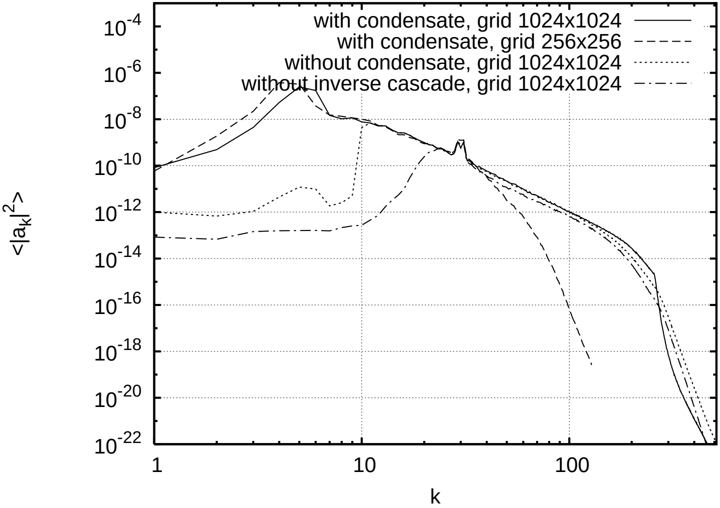
Здесь $R_{\vec{k}}(t)$ — равномерно распределённое случайное число в интервале $(0, 2\pi]$. Область моделирования $L_x = L_y = 2\pi$ с периодическими граничными условиями. Гамильтоновское интегрирование по времени: KAO, A.I. Dyachenko, and V.E. Zakharov, *Numerical simulation of surface waves instability on a homogeneous grid*, Physica D: Nonlinear Phenomena **321**, 51–66 (2016); arXiv:1212:2225.

Спектры прямого каскада. Усреднённые по углу.



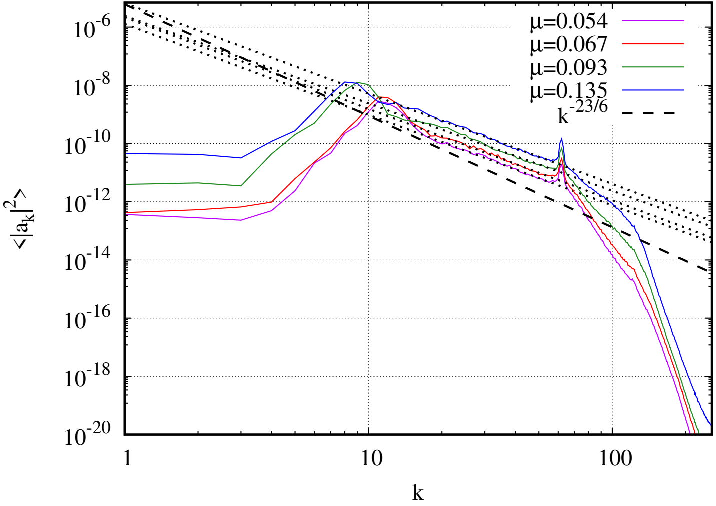
Dyachenko, KAO, Zakharov, JETP Letter **77** (10), 546-550 (2003) (arXiv:physics/0308101);
Dyachenko, KAO, Zakharov, PRL **92** (13), 134501 (2004) (arXiv:physics/0308099).

Спектры прямого и обратного каскада. Усреднённые по углу.



KAO, PRL **101**, 7, 074504 (2008) (arXiv:0805.0445).

Спектры обратного каскада. Усреднение по углу. $t \simeq 10^6 T_p$.



KAO, Phys. Rev. Lett., **130**, 264002 (2023) (arXiv:2211.16567).

Наименьшие квадараты: наклон для усреднённого по углу спектра.

μ	$k \in$	Средний наклон	Ошибка в наклоне
0.054	[17; 55]	−3.12	±0.04
0.067	[16; 55]	−3.14	±0.05
0.093	[12; 56]	−3.01	±0.05
0.135	[11; 56]	−3.11	±0.04
Все	170 точек	−3.07	±0.02

Таблица: Приближение наименьшими квадратами для различных симуляций. Вторая колонка показывает диапазон k между конденсатом и накачкой; the третья колонка даёт следний наклон α для $\langle |a_k|^2 \rangle \sim k^\alpha$; последняя колонка даёт оценку ошибки для приближения.

Аналитическое объяснение отклонения спектров от спектров KZ в рамках кинетического уравнения вот тут:

KAO, S. V. Nazarenko, Y. Pan, and J. Shatah, Journal of Fluid Mechanics, **992**, A1 (2024) (arXiv:2305.01930).

Спектры обратного каскада. Усреднённые по углу и отнормированные. $t \simeq 10^6 T_p$.