



ВОЛНОВАЯ ДИСПЕРСИЯ В ЗАДАЧАХ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

СТАРЫЕ ЗАДАЧИ, НОВЫЕ ПОДХОДЫ

Сергей Ильич Бадулин^{1,2},
Владимир Григорьевич Гневыхев²

¹Сколковский институт науки и технологий

²Институт океанологии П.П. Ширшова

28-30 августа, 2024



А.М. Рубенчик, Е.А. Кузнецов. О волнах на море и ряби на лужах. Квант, 1980, № 9, 22-26

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрытии

Квазидисперсия

Заключение

References





В этом докладе

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадюлин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

Квазидисперсия

Заключение

References

- 1 Дисперсия волн. Линейные волны – незакрытая тема
- 2 Метод стац. фазы (Stationary Phase Method – SPA)
- 3 Метод эталонных решений (Reference Solution Approach)
- 4 Задачи
 - Эллиптический источник конечного размера
 - Корабельные волны на глубокой воде
 - Гравитационно-капиллярные волны
 - Изгибные волны в ледяном покрове
 - Квазидисперсия: проблема SPA но не RSA
- 5 Выводы и перспективы

You are welcome to copy this presentation
badulin.si@ocean.ru



Линейные волны – линейная суперпозиция элементарных гармоник

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадудин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

Квазидисперсия

Заклучение

References

Ограничимся синусами-косинусами в задаче о свободных волнах, но замахнемся на произвольную размерность n и конечный размер и форму источника

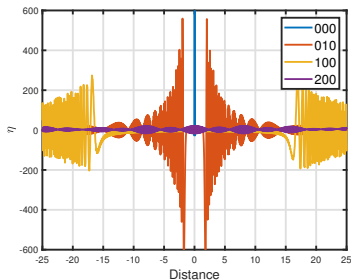
$$f_n(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left\{ (2\pi)^{-n/2} \int F_n(\mathbf{k}) \cdot \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)] \right\} d\mathbf{k}$$

Cauchy-Poisson problem

дисперсия волн разной длины

Cauchy (1815)

- 1 Волны от локального начального возмущения на поверхности глубокой жидкости:
- 2 Волны от импульса при невозмущенной поверхности





Дисперсия наоборот – волны-убийцы

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневышев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрытии

Квазидисперсия

Заключение

References



Зададим начальное условие такое, чтобы ...

$$f_n(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ (2\pi)^{-n/2} \int F_n(\mathbf{k}) \cdot \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)] \right\} d\mathbf{k}$$

Простое обращение задачи по времени дает эффект

University of Oxford – concentric wave singularity

19 гармоник единичной амплитуды



Метод стационарной фазы (SPA)

Hamilton (1841); Stokes (1905); Kelvin (1906) и др.

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневышев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрытии

Квазидисперсия

Заключение

References

Интеграл от быстроосциллирующей функции

$$f_n(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \left\{ (2\pi)^{-n/2} \int F_n(\mathbf{k}) \cdot \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega(\mathbf{k})t)] \right\} d\mathbf{k}$$

Основной вклад вносят стац. точки $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{k}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \Big|_{st} - \frac{\mathbf{x}}{t} = 0$

$$f_1(x, t) = |F_1(\omega_{st})| \sqrt{\frac{2}{\pi |\omega''_{st}| t}} \cos(k_{st}x - \omega_{st}t \pm \pi/4)$$

- Большой параметр \rightarrow медленность изменения $F_n \rightarrow$ точечный пакет;
- «Точечные» групповая скорость ω'_k и дисперсия ω''_{kk} ;
- Проблемы с размером и формой пакета;
- Обобщение на многомерный случай нетривиально



Стационарная фаза в многомерном случае

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течениях

Волны в ледовом
покрытии

Квазидисперсия

Заклучение

References

Рассмотрим разложение Тейлора

$$\omega(k, l) = \omega(k_0, l_0) + \omega'_k(k - k_0) + \omega'_l(l - l_0) \\ + 1/2\omega''_{kk}(k - k_0)^2 + 1/2\omega''_{ll}(l - l_0)^2 + \omega''_{kl}(k - k_0)(l - l_0) + \dots$$

Появляется соответствующая квадратичная форма

$$A_2 = \begin{vmatrix} tk_0^2\omega''_{kk} & tk_0l_0\omega''_{kl} \\ tk_0l_0\omega''_{kl} & tl_0^2\omega''_{ll} \end{vmatrix}$$

и ее инварианты

$$\det(A_2) = t^2 k_0^2 l_0^2 [\omega''_{kk}\omega''_{ll} - (\omega''_{kl})^2]; - \text{«объем» пакета}$$

$$\text{Tr}(A_2) = t [k_0^2\omega''_{kk} + l_0^2\omega''_{ll}] - \text{сдвиг фазы}$$



Метод эталонных функций – альтернатива и новые задачи (Kelvin, 1906)

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

Квазидисперсия

Заклучение

References

Хотим уйти от SPA и немного меняем постановку, следуя классике (Kelvin, 1906). Слабо модулированный гауссов (**не точечный !!!**) пакет в x -пространстве

$$f_2(x, y, t = 0) = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \exp \left[ik_0 x + il_0 y - \frac{x^2}{2(\Delta x)^2} - \frac{y^2}{2(\Delta y)^2} \right]$$

он же спектрально узкий в пространстве волновых векторов
 $\Delta k/k_0 \ll 1, \Delta l/l_0 \ll 1$

$$F_2(k, l) = \exp \left[-\frac{(k - k_0)^2}{2(\Delta k)^2} - \frac{(l - l_0)^2}{2(\Delta l)^2} \right],$$

Далее оцениваем соответствующий интеграл. Определяющий вклад дает окрестность максимума «шапочки» (см. метод Лапласа)



Чем замечательно гауссово распределение?

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадюлин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

Квазидисперсия

Заключение

References

Аппроксимируем дисперсионное соотношение в окрестности максимума распределения (шапочки)

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_0) + \omega'_k \delta k + \omega'_l \delta l + \frac{1}{2} \omega''_{kk} (\delta k)^2 + \omega''_{ll} (\delta l)^2 + 2\omega''_{kl} \delta k \delta l + \dots$$

Фурье-образ гауссианы есть гауссиана (Fedoryuk, 1994)

$$\begin{aligned} & \int_{R^n} \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \mathbf{B} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - i \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle \right] d\mathbf{x} \\ &= (2\pi)^{n/2} (\det \mathbf{B})^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \langle \mathbf{B}^{-1} \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi} \rangle \right] \end{aligned}$$

\mathbf{B} и \mathbf{B}^{-1} – матрицы квадратичных форм определяют распределения в пространствах координат и волновых векторов



Явные выражения для волновой функции

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадурин,
В.Гневывшев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

Квазидисперсия

Заключение

References

Можем записать результат в явной форме

$$f_2(x, y, t) = \Psi_2(x, y, t) \cos [\phi(x, y, t)]$$

Введем $\mu_x = (\Delta k)^2 \omega''_{kk}$, $\mu_y = (\Delta k)^2 \omega''_{ll}$, $\mu_{xy} = \Delta k \Delta l \omega''_{kl}$.
Огибающая волнового пакета

$$\Psi_2(x, y, t) = D^{-1/2} \times \exp [-C(\xi_x, \xi_y)/2D^2]$$

с квадратичной формой

$$C(\xi_x, \xi_y) = t^2 [(\xi_x \mu_{xy} - \xi_y \mu_x)^2 + (\xi_y \mu_{xy} - \xi_x \mu_y)^2] + (\xi_x^2 + \xi_y^2),$$

лок. координат $\xi_x = \Delta k(x - c_{gr.x}t)$; $\xi_y = \Delta l(y - c_{gr.y}t)$,

Пакеты – эллипсы, которые могут вращаться в пространстве, стремясь к предельной ориентации



Явные выражения для объема пакеты и фазовой функции

Современная гидродинамика 2024

С.Бадулин, В.Гневыхев

Дисперсия волн

Эталонные решения

Задачи

Эллиптический источник

Корабельные волны

Грав.-кап. на течении

Волны в ледовом покрове

Квазидисперсия

Заключение

References

Объем пакета D

$$D^2 = |\det \mathbf{B}|^2 = [1 + t^2(\mu_{xy}^2 - \mu_x\mu_y)]^2 + t^2(\mu_x + \mu_y)^2,$$

как в Стац.Фазе

что-то новое

Фазовая функция

$$\phi(x, y, t) = k_0x + l_0y - \omega(k_0, l_0)t - \theta_2(t) - \omega_2(x, y, t).$$

как в Стац.Фазе

почти как

никак

Независящий от координат сдвиг

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{(\mu_x + \mu_y)t}{1 + t^2(\mu_{xy}^2 - \mu_x\mu_y)} \right]$$

дает в пределе точечного источника (SPA) $\pm\pi/4$ или 0



Эллиптический осциллирующий источник

$$F_2(k, l) = \exp \left[-\frac{(k-k_0)^2}{2(\Delta k)^2} - \frac{(l-l_0)^2}{2(\Delta l)^2} \right] \times \exp(\omega_0 t), \quad (*)$$

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневышев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрые

Квазидисперсия

Заключение

References

Размер эллипса

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \gg \frac{1}{|kv_0|}$$

Дисперсионное соотношение

$$\omega_0 = \sqrt{g|k_0|}$$

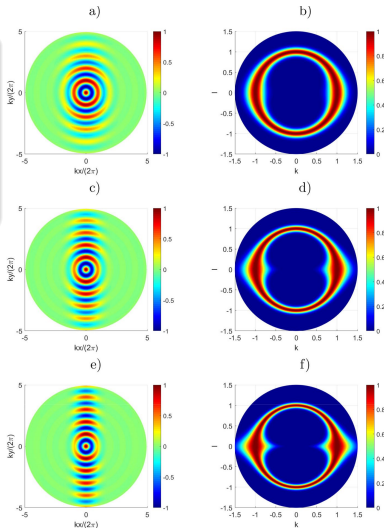
Left – coordinate plane,
Right – wavevector plane

The pulse area $1/(\Delta x \Delta y) = \Delta k \Delta l / |k|^2 = 0.01$ is fixed.

a,b – $(\Delta l / \Delta k) = 2.25$;

c,d – $(\Delta l / \Delta k) = 4$;

e,f – $(\Delta l / \Delta k) = 6.25$





Эллиптический осциллятор. Огибающая

Размер области $500/\pi$ длин волн. Gnevyshev & Badulin (2023)

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневышев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

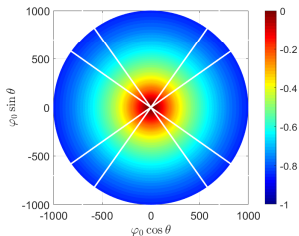
Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

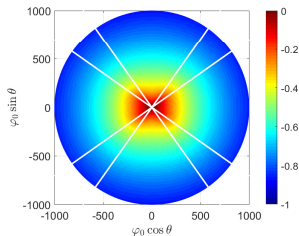
Квазидисперсия

Заключение

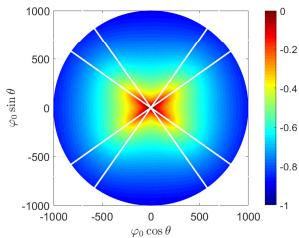
References



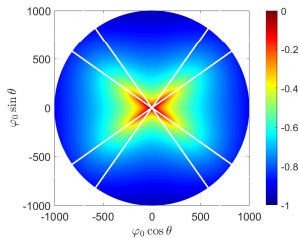
a) $\Delta y/\Delta x = 1$



b) $\Delta y/\Delta x = 2.25$



c) $\Delta y/\Delta x = 4$



d) $\Delta y/\Delta x = 6.25$



Почему? Просто смотрим на явные формулы

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрытии

Квазидисперсия

Заключение

References

Удобно записать выражения в терминах фазы $\varphi_0 = \frac{1}{2}\omega_0 t$

Объем пакета $D^2 = (1 + A^2/2)^2 + B^2$

состоит из «старой» изотропной $A = \varphi_0 \frac{\Delta k \Delta l}{\kappa^2}$

и «новой» анизотропной части (non-SPA) B

$$B = \varphi_0 \left[\left(1 - \frac{3}{2} \cos^2 \theta\right) \left(\frac{\Delta k}{\kappa}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta\right) \left(\frac{\Delta l}{\kappa}\right)^2 \right].$$

$$\cos^2 \theta_{B=0} = \frac{2 - \alpha^2}{3(1 - \alpha^2)}, \quad \alpha^2 = \frac{(\Delta l)^2}{(\Delta k)^2}$$

$\theta_{\kappa_1} = \arccos \sqrt{2/3} \approx 35.26^\circ$ ($\theta_{\kappa_2} = \arcsin \sqrt{2/3} \approx 54.74^\circ$)
есть классический угол Кельвина.

Эллипс генерирует крест !!!



Эллиптический осциллятор. Фазовый сдвиг θ_2 . Все иначе, чем в SPA

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

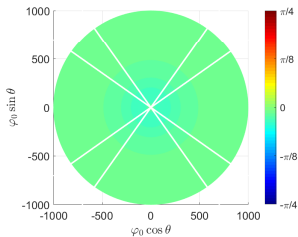
Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

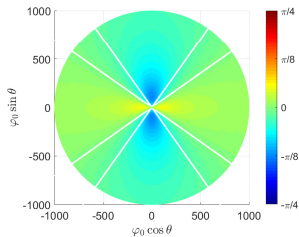
Квазидисперсия

Заключение

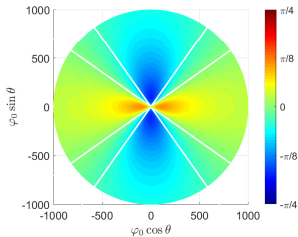
References



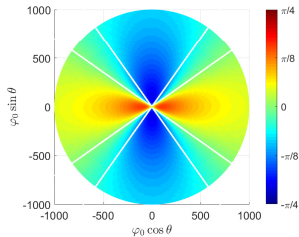
a) $\Delta y / \Delta x = 1$



b) $\Delta y / \Delta x = 2.25$



c) $\Delta y / \Delta x = 4$



d) $\Delta y / \Delta x = 6.25$



Эллиптический осциллятор. Сравнение с точным решением

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадюлин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

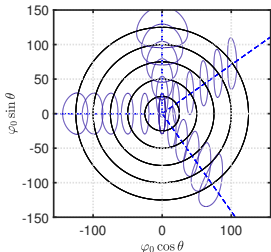
Волны в ледовом
покрытии

Квазидисперсия

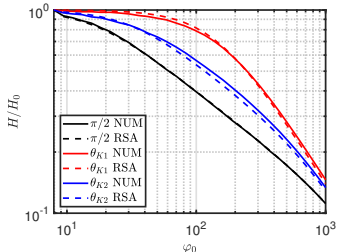
Заключение

References

a)



b)



a) – Evolution of narrow-banded pulses ($\varepsilon = \Delta k / \Delta l = 6.25$) for different directions relatively to the ellipse main axes. Dashed lines – pulse trajectories for angles $\theta = \pi/2, \theta_{K1}, \theta_{K2}$. Circles correspond to $\varphi_0 = 25, 50, 75, 100, 125$.

b) – The normalized envelope amplitude for different directions (see legend) as function of φ_0 . Solid line – direct simulation, dashed – the RSA results.



О применимости нашего метода

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

Квазидисперсия

Заключение

References

- Вблизи источника работает по построению;
- На больших удалениях имеет асимптотики SPA;
- На промежуточных масштабах дает «неожиданные» эффекты, подтверждающиеся при точном счете.



On ship waves, Mr William Thomson, Aug.1887 see review Svirkunov & Kalashnik (2014)

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

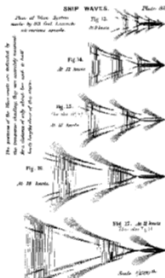
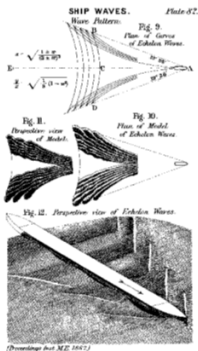
Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрые

Квазидисперсия

Заклучение

References



1. Системы расходящихся и поперечных волн;
2. Угол волнового конуса (угол Кельвина) не зависит от скорости
3. Картина формируется очень быстро ('about two and a half of wavelengths' in words of Kelvin)

Остается проблема сглаживания сингулярностей ("to blur, to smooth it down" Kelvin, Havelock, Lighthill, Lamb, Sretensky et al) в существенно двумерной задаче. Метод стац. фазы следует применять с большой осторожностью



Волновые следы

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадюлин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

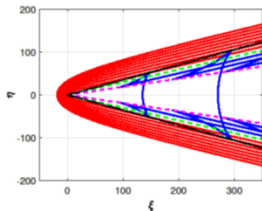
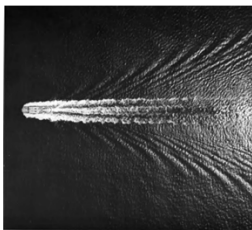
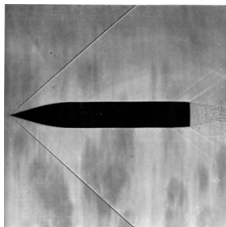
Волны в ледовом
покрытии

Квазидисперсия

Заклучение

References

Van Dyke, 1982



Нет дисперсии

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx) dk \rightarrow \delta(x)$$

Отрицательная
дисперсия,
степенной закон
 $C_p/C_g = \text{const} > 1$

Знакопеременная
дисперсия,
грав.-капиллярные
волны



Корабельные волн глубокой воде

Thomson (1887) и Gnevyshev & Badulin (2020b), AIP

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневышев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

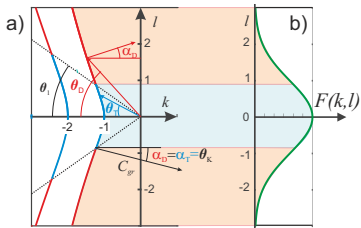
Волны в ледовом
покрые

Квазидисперсия

Заключение

References

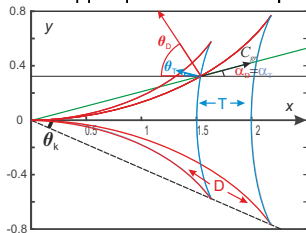
Условие стационарности волн



$$\Omega(\mathbf{k}) = (g|\mathbf{k}|)^{1/2} + kU.$$

$$\cos \theta = \frac{-k}{(k^2 + l^2)^{1/2}},$$

Расходящиеся и поперечные



$$x = \Omega'_k t; \quad y = \Omega'_l t.$$

$$x = \frac{U^2 \varphi_0}{g} \cos \theta (2 - \cos^2 \theta);$$

$$y = \frac{U^2 \theta_0}{g} \sin \theta \cos^2 \theta.$$



Корабельные волны на глубокой воде

Thomson (1887) и Gnevyshev & Badulin (2020b), AIP

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневышев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

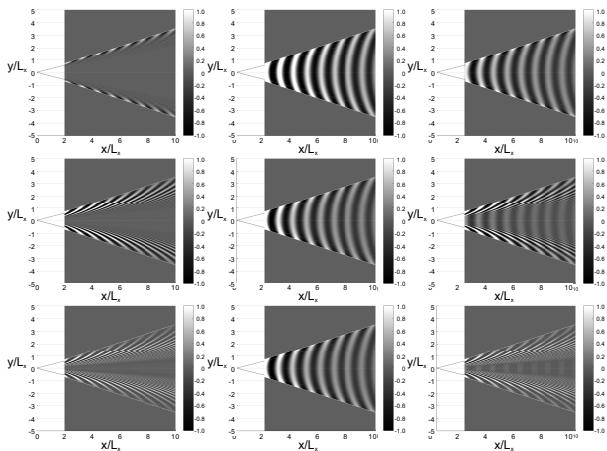
Волны в ледовом
покрые

Квазидисперсия

Заклучение

References

Картина зависит от размера источника и формы источника
(числа Фруда $Fr^2 = \frac{U^2}{gL_x}$ и отношения $\alpha = L_x/L_y$)



$Fr = 0.5$

$Fr = 1.0$

$Fr = 2.0$



Гравитационно-капиллярные волны

Gnevyshev & Badulin (2020a), Fluids

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадюлин,
В.Гневышев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

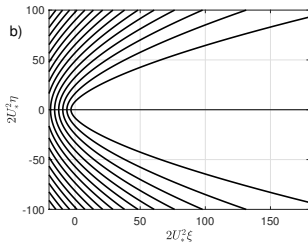
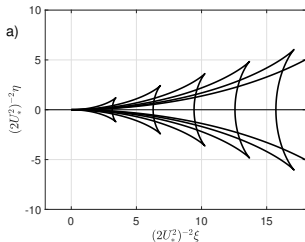
Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрые

Квазидисперсия

Заклучение

References



Чисто гравитационные (отрицательная дисперсия) (a)
чисто капиллярные (положительная дисперсия) (b).

Внимание на обезразмеривание !!!

$$\xi = 2U_*^2 \varphi \cos \theta (2 - \cos^2 \theta)$$

$$\xi = \frac{\varphi}{2U_*^2 \cos^3 \theta} (2 - 3 \cos^2 \theta)$$

$$\eta = 2U_*^2 \varphi \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$\eta = \frac{3\varphi \sin \theta}{2U_*^2 \cos^2 \theta}$$

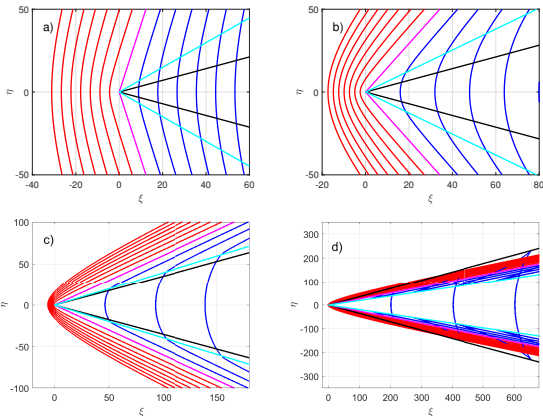
Противоположная зависимость от U_*



Минимум фазовой скорости – главный масштаб

$$L = \delta^{1/2} g^{-1/2} = 0.275 \text{ cm}; \quad T = \delta^{1/4} g^{-3/4} = 0.0167 \text{ s};$$

$$\delta = \gamma / \rho \approx 74 \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-2} \quad U_* = UT / (\sqrt{2}L) = U / C_m - \text{число Маха}$$



Два конуса, Кельвина и Маха

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневышев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрытии

Квазидисперсия

Заключение

References



Амплитуды волнового следа Бульдозерный эффект

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневыхшев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

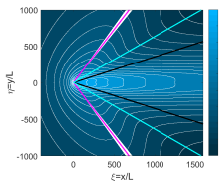
Волны в ледовом
покрытии

Квазидисперсия

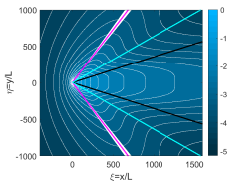
Заклучение

References

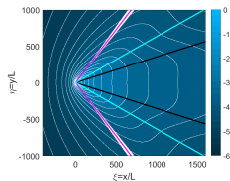
$$U_* = (2\sqrt{3} - 3)^{-1/4} \text{ минимум групповой скорости}$$



$$\alpha = 4$$



$$\alpha = 1$$



$$\alpha = 1/4$$



Изгибно-гравитационные волны в ледовом покрове, Badulin, Gnevyshev, Stepanyants, in prep.

Современная гидродинамика 2024

С.Бадулин, В.Гневывшев

Дисперсия волн

Эталонные решения

Задачи

Эллиптический источник

Корабельные волны

Грав.-кап. на течениях

Волны в ледовом покрове

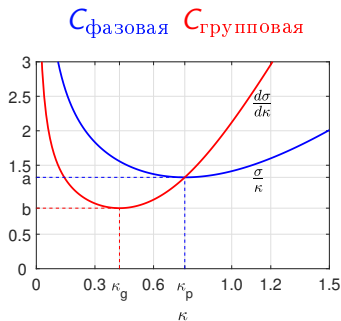
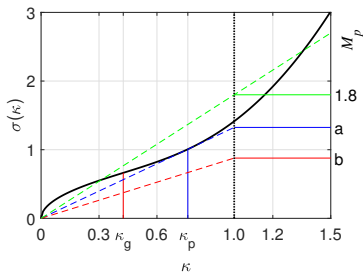
Квазидисперсия

Заклучение

References

Безразмерная дисперсионная зависимость подобна грав.-кап. случаю

$$\sigma(\kappa_x, \kappa_y) = \sqrt{|\kappa| (1 + |\kappa|^4)}$$



Полезно говорить о двух Махах,

фазовом $M_p = U/C_m$ и групповом $M_g = U/C_{mg}$



В отличие от гравитационно-капиллярных волн важны реальные масштабы

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневышев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

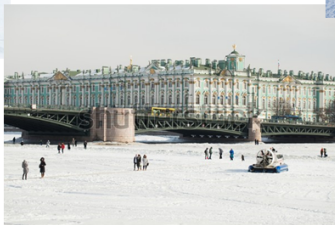
Квазидисперсия

Заключение

References



**River Northern Dvina,
ice surfing
competitions**
Ice thickness 10 cm,
FGW phase speed less
than 2 m/s (7.2 km/h)



**Winter walks on the ice of the river Neva near the Palace
bridge, St-Petersburg, Russia, 08 March 2018**
 $h=40$ cm, $C_p=6.7$ m/s,
The aerosleigh speed is up to 50 km/h (13 m/s)



Arctic landing.
 $h=3$ m, $C_p=25$ m/s,
Aircraft speed ~ 50 m/s

www.shutterstock.com - 1042852699



Изофазы поля изгибно-гравитационных волн для $M_p = 1.1417, 1.76, 2, 4$

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

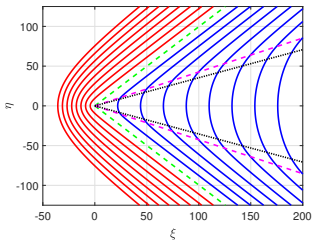
Волны в ледовом
покрове

Квазидисперсия

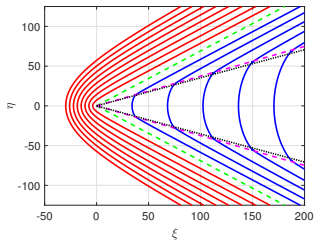
Заключение

References

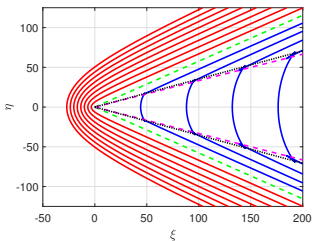
a)



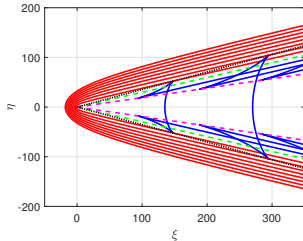
b)



c)



d)





Снова об амплитудах и эффекте формы источника («бульдозер?»)

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадюлин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

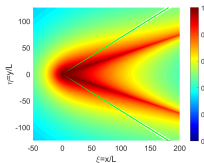
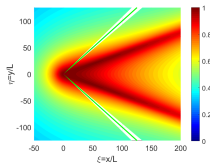
Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрытии

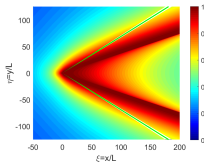
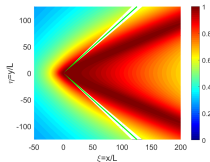
Квазидисперсия

Заклучение

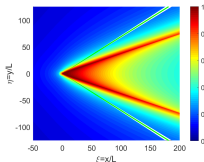
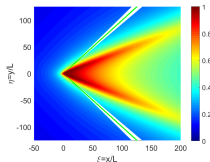
References



$$\alpha = 1/3$$



$$\alpha = 1$$



$$\alpha = 3$$

$$M_p = 1.417$$

$$M_p = 1.76$$



Интересны не только смещения, но и их производные, а, значит, резко меняющиеся фазы

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадюлин,
В.Гневыхов

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

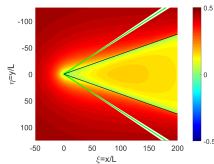
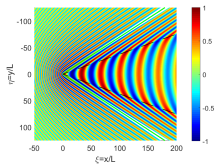
Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

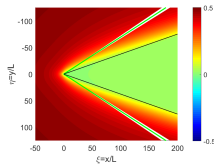
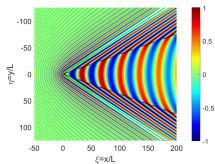
Квазидисперсия

Заклучение

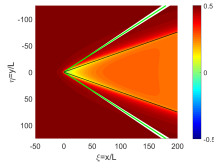
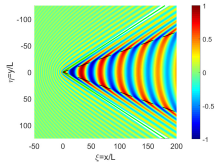
References



$$\alpha = 1/3$$



$$\alpha = 1$$



$$\alpha = 3$$

η

θ_2



Квазидисперсия волн Россби Gnevyshev & Vadulin (2017), Вестник МГУ

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневышев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрытии

Квазидисперсия

Заключение

References

Для изотропного дисперсионного соотношения и «почти изотропного» начального импульса мы обнаруживаем существенную анизотропию решения.

Что будет для анизотропных волн (пример, волны Россби)?
Еще раз посмотрим на выражение для объема пакета

$$D^2 = |\det B|^2 = [1 + t^2(\mu_{xy}^2 - \mu_x\mu_y)]^2 + t^2(\mu_x + \mu_y)^2,$$

$$SPA \sim t^{-1},$$

$$non-SPA \sim t^{-1/2} - \text{аномальная (квази-) дисперсия}$$



Квазидисперсия волн Россби

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

Квазидисперсия

Заключение

References

Условие квазидисперсии

$$\Delta_{kl} = (\omega''_{kl})^2 - \omega''_{kk}\omega''_{ll} = 0 \quad \text{при} \quad \omega''_{kl} \neq 0$$

не выполняется для изотропных законов дисперсии.
Для волн Россби (в безразмерном виде)

$$\omega = \frac{-k}{k^2 + l^2 + 1}$$

получаем уравнение гиперболической лемнискаты (частный случай лемнискаты Бута) для $\Delta_{kl} = 0$

$$(k^2 + l^2)^2 = 3k^2 - l^2$$



Квазидисперсия пакетов волн Россби

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадюлин,
В.Гневышев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

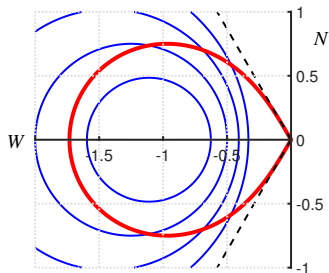
Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

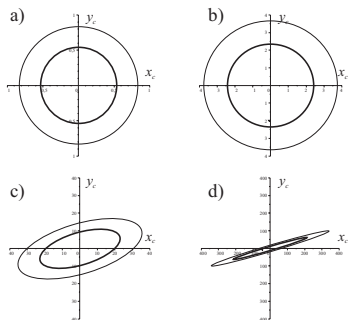
Квазидисперсия

Заклучение

References



Изочастоты дисперсионного соотношения и условие вырождения дисперсии для дисперсионного уравнения бароклинных волн Россби



Форма пакета волн Россби с волновым вектором $\tilde{\mathbf{k}} = \left(-1, \sqrt{\sqrt{17/4} - 3/2}\right)$ при $t = 1, 10, 100, 1000$. Изолинии 0.75 и 0.5 от максимума амплитуды



Flierl (1977), JPO

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

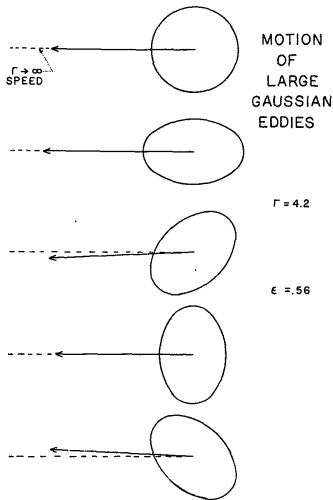
Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

Квазидисперсия

Заключение

References



Очень похоже, но не так
радикально как в нашем
случае квазидисперсии

FIG. 4.3. Direction of motion of slightly elliptical Gaussian eddies. The examples shown are for eddies having a scale large relative to R_d .



Выводы и перспективы

Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

Квазидисперсия

Заключение

References

- 1 Метод эталонных решений и его возможные обобщения;
- 2 Эллиптический источник в безграничной среде для разных видов волн;
- 3 Корабельные волны (источник на стационарном потоке);
- 4 Волны в ледовом покрове и другие типы волн (например, планетарные волны – см. ниже). амплитудные эффекты с учетом формы, ориентации эллипса и т.п.;
- 5 Эффект квазидисперсии изотропных волн Россби и других типов волн;



Современная
гидродинамика
2024

С.Бадулин,
В.Гневыхев

Дисперсия
волн

Эталонные
решения

Задачи

Эллиптический
источник

Корабельные
волны

Грав.-кап. на
течении

Волны в ледовом
покрове

Квазидисперсия

Заключение

References

Спасибо за внимание



CAUCHY, AUGUSTIN-LOUIS 1815 *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*, 1, vol. I, chap. Théorie de la propagation des ondes á la surface d'un fluid pesant d'une profondeur indéfinie, prix d'analyse mathématique en 1815, imprimé en 1827 dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, pp. 4–318. Gauthier-Villars, 1882.

FEDORYUK, M. V. 1994 *Encyclopedia of Mathematics*, chap. Saddle point method. Springer Science+Business Media B.V. / Kluwer Academic Publishers.

FLIERL, G. 1977 The application of linear quasigeostrophic dynamics to Gulf Stream Rings. *J. Phys. Oceanogr.* **7**, 365–379.

GNEVYSHEV, VLADIMIR & BADULIN, SERGEI 2020a Wave patterns of gravity-capillary waves from moving localized sources. *Fluids* **5** (4).



GNEVYSHEV, VLADIMIR & BADULIN, SERGEI 2023 Deep water waves from oscillating elliptic source. *Water waves* **5**, 239–256.

GNEVYSHEV, VLADIMIR G. & BADULIN, SERGEI I. 2017 On the asymptotics of multidimensional linear wave packets: Reference solutions. *Moscow University Physics Bulletin* **72** (4), 415–423.

GNEVYSHEV, VLADIMIR G. & BADULIN, SERGEI I. 2020*b* On reference solutions for ship waves. *AIP Advances* **10**, 025014.

HAMILTON, W. R. 1841 Researches respecting vibration, connected with the theory of light. *Proceedings of the Royal Irish Academy* **1**, 341–349.

KELVIN, LORD 1906 Deep sea ship waves. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh* **25** (2), 1060–1084.



STOKES, G.G. 1905 *Mathematical and Physical Papers*, , vol. 5, chap. Problem 11 of the Smith's Prize examination papers (Feb. 2, 1876), p. 362. Cambridge at the University Press, reprinted by Johnson Reprint Co., New York, 1966.

SVIRKUNOV, P. N. & KALASHNIK, M. V. 2014 Phase patterns of dispersive waves from moving localized sources. *Physics-Usp ekhi* **57** (1).

THOMSON, WILLIAM 1887 On ship waves. *Proc. Inst. Mech. Engrs* **38**, 409–434.