

# Солитонные модели нелинейных явлений: недавние результаты и перспективы

Дмитрий Агафонцев

Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН  
Сколковский институт науки и технологий  
Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН

Научная школа “Современная гидродинамика” 2024

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН  
Черноголовка, 28-30 августа 2024

Работа поддержана грантом РФФ 19-72-30028

## Коллаборация

Dr. Andrey Gelash, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (Switzerland)

Prof. Pierre Suret, Université de Lille (France)

Prof. Stephane Randoux, Université de Lille (France)

Prof. Gennady El., Northumbria University (UK)

Dr. Giacomo Roberti, Northumbria University (UK)

Dr. Thibault Congy, Northumbria University (UK)

Dr. Rustam Mullyadzhyanov, Institute of Thermophysics SB RAS (Russia)

Prof. Emer. Vladimir Zakharov, University of Arizona (USA)

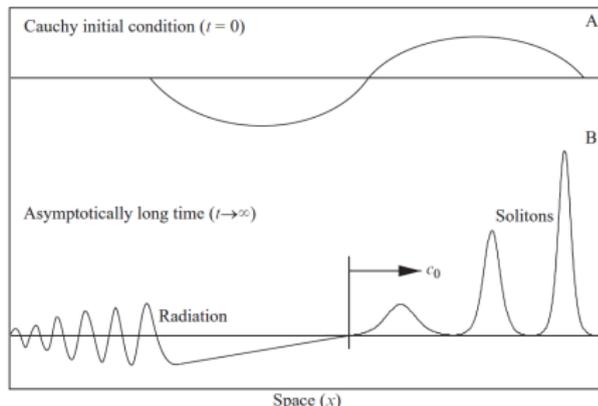
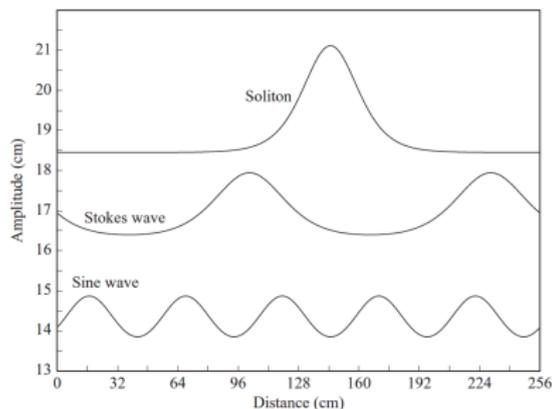
## План доклада

1. Численные результаты по статистическим свойствам модуляционной неустойчивости, которые мы получили в 2015-2016 годах и не могли объяснить.
2. Интегрируемость и солитоны.
3. Солитонные модели для модуляционной неустойчивости.

# Введение: солитоны в интегрируемых системах

1. В некоторых распределенных дисперсионно-нелинейных системах существуют решения в виде солитонов – локализованных волновых пакетов, которые сохраняют свою форму и движутся с постоянной скоростью. Впервые такую волну наблюдал Джон Скотт Рассел (*Report on Waves*, 1838), который назвал ее “great wave of translation”. Поскольку форма солитона не меняется, это означает, что на этих решениях достигается баланс между дисперсией и самофокусирующей нелинейностью.

2. Многие точно решаемые модели (например, уравнения КдВ, НУШ и синус-Гордон) допускают солитонные решения, и солитоны в них устойчивы благодаря интегрируемости этих моделей. В интегрируемых системах солитоны упруго взаимодействуют друг с другом: их форма и скорость сохраняются, а после столкновения они могут приобретать пространственные и фазовые сдвиги.



## Введение: почему солитонный газ?

1. В природе интегрируемые уравнения (КдВ, НУШ и т.д.) часто возникают, когда мы рассматриваем первые главные члены нелинейных эволюционных уравнений.
2. В интегрируемых системах локализованные волновые поля – те, которые нас в первую очередь интересуют в природе – раскладываются по базису, который состоит из солитонов и нелинейно-дисперсионных волн, и этот базис полон. Удобство этого базиса в том, что его элементы эволюционируют во времени линейно и независимо друг от друга подобно Фурье-гармоникам для линейных систем.
3. Существует теорема (см., например, P.D. Lax, C.D. Levermore 1983) о том, что если локализованное волновое поле достаточно протяженное и гладкое (квазиклассический предел), то оно в основном состоит из солитонов. Например, в нашей недавней статье (D.S. Agafontsev et al, 2023) мы исследовали статистику решений НУШ с малым членом накачки когда эволюция начинается из малого случайного шума. Довольно скоро после начала эволюции, когда влияние нелинейности было еще очень мало, наше волновое поле уже представляло собой практически чистое многосолитонное решение. После этой статьи наши коллеги из Астонского университета проанализировали свои слабонелинейные телекоммуникационные сигналы и обнаружили, что они работали с солитонным газом даже не осознавая этого. Таким образом, солитонный газ может быть очень распространенным явлением в природе.

*Примечание:* на самом деле мы работаем с солитонной жидкостью, в которой все солитоны сильно взаимодействуют со всеми. Под солитонным газом изначально понимали ансамбль слабо взаимодействующих солитонов.

# 1. Статистика МН: численные результаты

Рассмотрим одномерное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) фокусирующего типа,

$$i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0.$$

Простейшим его решением является плоская волна; для случая единичной амплитуды она записывается как  $\psi = e^{it}$ . Это решение является модуляционно неустойчивым: если подставить в уравнение слабomodулированную плоскую волну,

$$\psi = e^{it} \left[ 1 + \kappa e^{ikx + i\Omega t} \right], \quad |\kappa| \ll 1,$$

и линеаризовать его относительно фона  $\psi = e^{it}$ , тогда получим дисперсионное соотношение 
$$\Omega^2 = k^4 - 2k^2,$$

которое означает, что модуляции с волновыми векторами  $|k| < \sqrt{2}$  экспоненциально возрастают с инкрементом  $\gamma = |\text{Im } \Omega| = |k|\sqrt{2 - k^2}$ . Максимум инкремента  $\gamma = 1$  достигается для модуляций с волновыми векторами  $k = \pm 1$ , так что пока возмущения малы по сравнению с плоской волной (линейная стадия МН), рост концентрируется вокруг этих волновых чисел (отсюда характерный пространственный масштаб такого роста равен  $\ell = 2\pi$ ). Линейная стадия МН хорошо изучена в литературе, тогда как последующая нелинейная стадия до сих пор представляет собой сложную проблему.

Заметим, что если забыть о статистике шума, то существует только одна единственная проблема МН: для любых коэффициентов дисперсии и нелинейности и для любой амплитуды плоской волны задача о МН может быть перемасштабирована во времени, пространстве и амплитуде волнового поля.

# 1. Статистика МН: численные результаты

В статье D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Nonlinearity* **28**, 2791–2821 (2015), мы изучили статистику МН используя прямое численное моделирование. Наша мотивация:

- 1) проблема неустойчивости требует статистического описания, сложное хаотическое движение что мы наблюдаем можно понимать как особый тип турбулентности;
- 2) для неинтегрируемых уравнений существует аналитический инструмент для изучения эволюции статистики – кинетическое уравнение Хассельмана для спектра мощности (чисел заполнения), которое выводится в предположении слабой нелинейности и с учетом только резонансных взаимодействий. Однако для интегрируемых уравнений столкновительный член равен нулю в любом порядке теории возмущений. В 2009 году Владимир Захаров высказал предположение, что эволюция статистики должна необратимо идти к статистически стационарному состоянию;
- 3) 1D-НУШ сохраняет бесконечный ряд инвариантов, которые ограничивают возможную эволюцию. Первые три из них – это волновое действие, импульс и полная энергия,

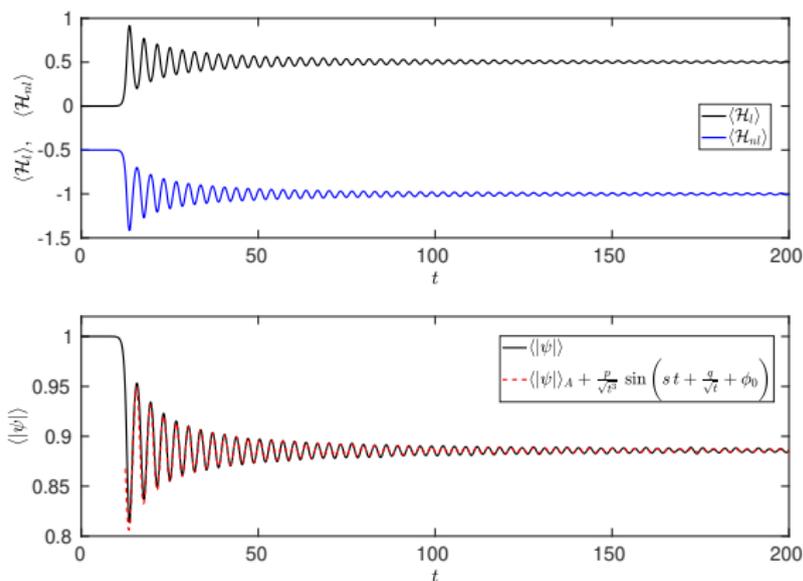
$$N = \overline{|\psi|^2} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |\psi|^2 dx = \sum_k |\psi_k|^2, \quad M = \frac{i}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} (\psi_x^* \psi - \psi_x \psi^*) dx = \sum_k k |\psi_k|^2,$$

$$E = H_I + H_{nl},$$

$$H_I = \overline{|\psi_x|^2} = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} |\psi_x|^2 dx = \sum_k k^2 |\psi_k|^2, \quad H_{nl} = -\frac{1}{2} \overline{|\psi|^4} = -\frac{1}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} |\psi|^4 dx.$$

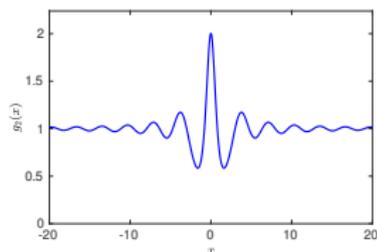
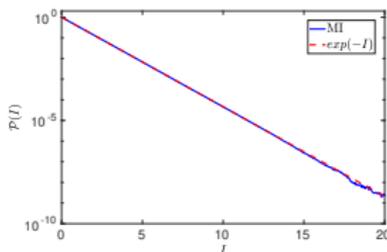
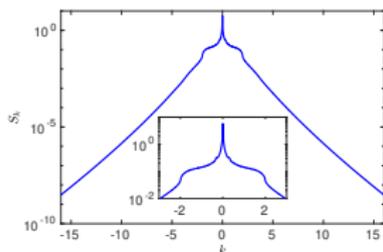
- 4) нелинейную стадию МН нельзя рассматривать как слабонелинейную задачу;
- 5) много спекуляций о том, что МН должна значительно усилить появление волн-убийц.

# 1. Статистика МН: численные результаты



Эволюция усредненных по ансамблю кинетической и потенциальной энергии. Линейная и нелинейная стадия МН, осцилляции которые никто до нас не наблюдал, 2 причины этого. Все другие статфункции тоже осциллируют таким же образом: сильные осцилляции в нелинейной стадии, которые затухают со временем, переход в стационарный режим. В этом состоянии потенциальная энергия вдвое больше кинетической, сравнение спектральных плотностей энергий. Фит для аппроксимации этих осцилляций, согласно нему  $s = 2$ . Из анализа размерностей устанавливаем соотношение  $s = 2\gamma_{\max}$ .

# 1. Статистика МН: численные результаты



Характеристики асимптотического статистически стационарного состояния:

(слева) спектр мощности  $S_k = \frac{\langle |\psi_k|^2 \rangle}{\Delta k}$  имеет очень специфическую форму и при малых волновых числах расходуется по степенному закону,  $S_k \propto |k|^{-1/2}$ .

(центр) функция плотности вероятности (PDF)  $\mathcal{P}(I)$  интенсивности  $I = |\psi|^2 / \langle |\psi|^2 \rangle$  равна экспоненциальный – такой же, как и для чисто линейной системы.

(справа) автокорреляция интенсивности  $g_2(x) = \frac{\overline{(|\psi(y+x)|^2 \cdot |\psi(y)|^2)}}{\langle |\psi(y)|^2 \rangle^2}$  (верхняя черта означает усреднение по координате  $y$ ) имеет колебательную форму, отличающую это результат от случайной суперпозиции линейных волн.

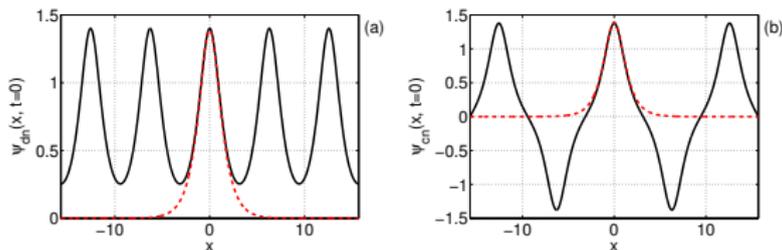
Последние результаты были получены в дальнейшем исследовании A. Kraych, D.S. Agafontsev, S. Randoux, P. Suret, Phys. Rev. Lett. **123**, 093902 (2019), где мы подтвердили эти результаты в экспериментах с оптическими волокнами.

# 1. Статистика МН: численные результаты

Меня заинтересовало соотношение  $s = 2\gamma_{\max}$ , и поэтому в D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, Nonlinearity **29**, 3551–3578 (2016) мы обратились к изучению МН кноидальных волн.

Кноидальные волны представляют собой однопараметрические семейства периодических стационарных решений НУШ; для фокусирующего случая существуют dn- и cn-ветви таких решений (обе ветви модуляционно неустойчивы), которые записываются через соответствующие эллиптические функции Якоби,

$$\psi_{\text{dn}}(x, t) = e^{i\Omega t} \sqrt{2} \nu \operatorname{dn}(\nu x; m^2), \quad \psi_{\text{cn}}(x, t) = e^{i\Omega t} \sqrt{2} m \nu \operatorname{cn}(\nu x; m^2).$$



Константы  $\Omega$ ,  $\nu$  и  $m$  зависят от вещественного и мнимого полупериодов  $\omega_0$  и  $\omega_1$ . Кноидальные волны можно представить как бесконечные солитонные решетки,

$$|\psi(x, t)|^2 = 2\wp(\mathbf{a}) + \frac{\zeta(i\omega_1)}{i\omega_1} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{2\lambda^2}{\cosh^2 \lambda(x - 2j\omega_0)}, \quad \lambda = \pi/2\omega_1,$$

где  $\mathbf{a} = \omega_0$  для dn-ветви и  $\mathbf{a} = \omega_0 + i\omega_1$  для cn-ветви,  $\wp(\mathbf{z})$  – эллиптическая функция Вейерштрасса с вещественными и мнимыми полупериодами  $\omega_0$  и  $\omega_1$ , а  $\zeta'(\mathbf{z}) = -\wp(\mathbf{z})$  – дзета-функция.

# 1. Статистика МН: численные результаты

При слабом перекрытии солитонов  $\omega_1/\omega_0 \ll 1$  кноидальные волны переходят в решетку солитонов,

$$\psi(x, t) \rightarrow e^{i\lambda^2 t} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{ej} \sqrt{2} \lambda}{\cosh \lambda(x - 2j\omega_0)},$$

где  $\varrho = 0$  для dn-ветви и  $\varrho = 1$  для sn-ветви. При сильном перекрытии  $\omega_1/\omega_0 \gg 1$  кноидальные волны dn-ветви переходят в плоскую волну,

$$\psi_{dn}(x, t) \rightarrow \sqrt{2} \kappa e^{2i\kappa^2 t},$$

а кноидальные волны sn-ветви - в синусоидальную волну малой амплитуды,

$$\psi_{cn}(x, t) \rightarrow \left[ 4\sqrt{2} \kappa \exp(-\kappa \omega_1) \right] e^{-i\kappa^2 t} \cos(\kappa x),$$

где  $\kappa = \pi/2\omega_0$ .

Обе ветви модуляционно неустойчивы. Для dn-ветви максимальный инкремент найден в работе E.A. Kuznetsov, M.D. Spector, *Teor. Mat. Fyz.* **120**, 997-1008 (1999),

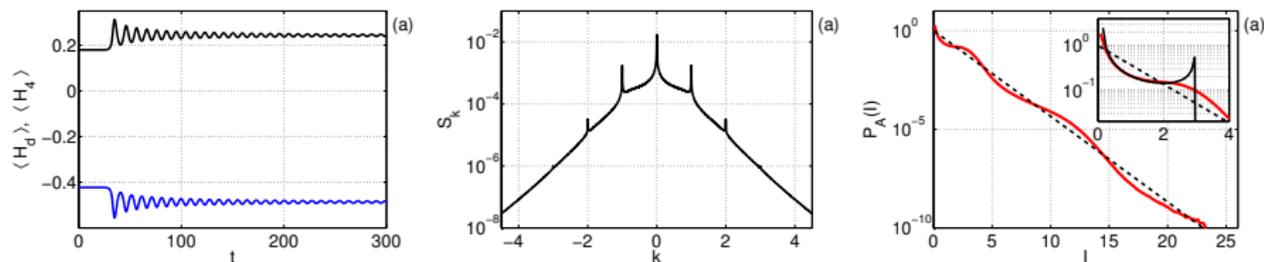
$$\gamma_{\max} = 2\nu^2 \sqrt{1 - m^2}.$$

При фиксированном  $\omega_0$  это соотношение экспоненциально мало при малых  $\omega_1$ , монотонно возрастает с ростом  $\omega_1$  и приближается к  $2\kappa^2$  при  $\omega_1 \rightarrow +\infty$ .

Насколько нам известно,  $\gamma_{\max}$  для sn-ветви пока не найден.

# 1. Статистика МН: численные результаты

В нашей статье 2016 года мы зафиксировали  $\omega_0 = \pi$  и изучили МН dn-ветви кноидальных волн для различных  $\omega_1$  от слабого до сильного перекрытия солитонов. На рисунках ниже показаны результаты для промежуточного перекрытия  $\omega_1 = 1.6$ .



Мы подтвердили временные колебания на нелинейной стадии МН, которые очень хорошо аппроксимируются анзацем

$$\kappa_4(t) = \kappa_4^A + \frac{p}{t^\alpha} \sin\left(st + \frac{q}{\sqrt{t}} + \phi_0\right),$$

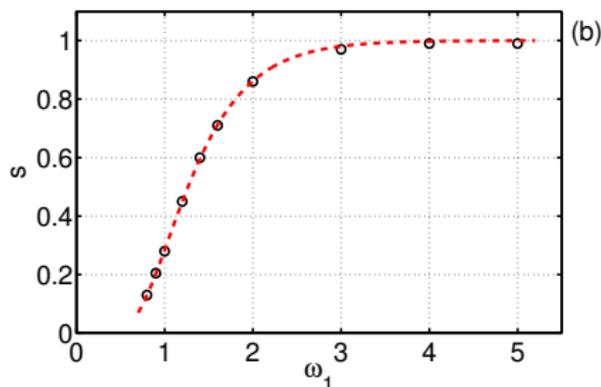
с немного другим поведением амплитуды  $\alpha \in (1, 1.5)$  в зависимости от мнимого полупериода  $\omega_1$ .

Спектр мощности в асимптотическом стационарном состоянии оказался нетривиальной функцией с расходимостями на целых волновых числах  $k = 0, \pm 1, \pm 2$  и т.д.

При сильном перекрытии PDF в асимптотическом состоянии является экспоненциальной, а при слабом перекрытии представляет собой комбинацию PDF для одного солитона и PDF двухсолитонных столкновений, происходящих с экспоненциально малой частотой.

# 1. Статистика МН: численные результаты

Для всего семейства кноидальных волн  $dn$ -ветви численно подтверждено соотношение  $s = 2\gamma_{\max}$  (справа) и то, что потенциальная энергия в асимптотическом стационарном состоянии вдвое больше кинетической (слева).



Когда мы получили эти результаты, мы понятия не имели не только, как их строго объяснить, но даже как попытаться понять наблюдаемое поведение.

## 2. Интегрируемость и солитоны

Метод обратного преобразования рассеяния (IST) был первоначально открыт C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal and R.M. Miura, Phys. Rev. Lett. 19, 1095 (1967) для уравнения КдВ,

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0,$$

где  $u(x, t) \in \mathbb{R}$ . Они рассмотрели задачу рассеяния для оператора Шредингера,

$$\widehat{\mathcal{L}}f = \lambda f, \quad \widehat{\mathcal{L}} = -\partial_{xx} + u(x),$$

для быстро убывающих потенциалов  $|u(x)| \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Для таких потенциалов задача на собственные значения  $\widehat{\mathcal{L}}f = \lambda f$  имеет ограниченные решения  $f$  для всех положительных уровней энергии  $\lambda > 0$  (непрерывный спектр) и конечного числа отрицательных уровней  $\lambda_n < 0$ ,  $n = 1, \dots, N$  (дискретный спектр).

В квантовой механике можно решить *прямую задачу рассеяния* от потенциала  $u(x)$  к коэффициентам рассеяния, а также *обратную задачу рассеяния* от коэффициентов рассеяния к потенциалу  $u(x)$ . Было показано, что если  $u(x, t)$  эволюционирует согласно уравнению КдВ, то дискретные уровни энергии постоянны  $\partial_t \lambda_n = 0$  и коэффициенты рассеяния изменяются во времени как гармоники Фурье в теории линейных волн.

Стало возможным фундаментально решить начальную задачу Коши для уравнения КдВ, найдя данные рассеяния из решения задачи рассеяния, вычислив его эволюцию во времени, а затем восстановив потенциал  $u(x, t)$  обратным преобразованием рассеяния.

Прямая аналогия с уравнением теплопередачи: прямое преобразование Фурье, умножение гармоник на экспоненты от времени, обратное преобразование Фурье.

## 2. Интегрируемость и солитоны

В работе V.E. Zakharov, A.B. Shabat, Sov. Phys. JETP 34, 62 (1972), этот метод был обобщен на НУШ. Авторы представили НУШ как условие совместности переопределенной вспомогательной линейной системы – пары Лакса. С тех пор пара Лакса для НУШ известна как система Захарова-Шабата (ЗШ), которая записана для двухкомпонентной векторной волновой функции  $\Phi(x, t, \lambda) = (\phi_1, \phi_2)^T$ ,

$$\Phi_x = \begin{pmatrix} -i\lambda & \psi \\ -\psi^* & i\lambda \end{pmatrix} \Phi, \quad \Phi_t = \begin{pmatrix} -i\lambda^2 + \frac{i}{2}|\psi|^2 & \lambda\psi + \frac{i}{2}\psi_x \\ -\lambda\psi^* + \frac{i}{2}\psi_x^* & i\lambda^2 - \frac{i}{2}|\psi|^2 \end{pmatrix} \Phi,$$

где звездочка обозначает комплексно-сопряженное соединение. При этом НУШ

$$i\psi_t + \frac{1}{2}\psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0,$$

получается из условия совместности  $\Phi_{xt} = \Phi_{tx}$ . Первое уравнение системы ЗШ можно переписать как задачу на собственные значения для комплекснозначного спектрального параметра  $\lambda = \xi + i\eta$ ,

$$\widehat{\mathcal{L}}\Phi = \lambda\Phi, \quad \widehat{\mathcal{L}} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - i \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \psi^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно ввести задачу рассеяния для  $\widehat{\mathcal{L}}$  и  $\Phi$ , в которой волновое поле  $\psi$  НУШ играет роль потенциала. Для локализованных потенциалов эта задача имеет ограниченные решения для вещественного спектрального параметра  $\lambda = \xi \in \mathbb{R}$  (непрерывный спектр), а также для конечного числа дискретных точек  $\lambda_n = \xi_n + i\eta_n$ ,  $\eta_n > 0$ ,  $n = 1, \dots, N$  (дискретный спектр). Заметим, что без ограничения общности мы рассматриваем только верхнюю половину  $\lambda$ -плоскости,  $\eta = \text{Im } \lambda \geq 0$ .

## 2. Интегрируемость и солитоны

Самое главное, что потенциал  $\psi(x, t)$  оказывается во взаимно однозначном соответствии с так называемыми *данными рассеяния*,

$$\psi \leftrightarrow \{\lambda_n, \rho_n(t), r(\xi, t)\},$$

где  $\lambda_n$  – точки дискретного спектра,  $\rho_n(t)$  – ассоциированные коэффициенты, а  $r(\xi, t)$  – коэффициент отражения, представляющий непрерывный спектр, и эти данные рассеяния тривиально меняются со временем. В частности, эволюция НУШ сохраняет дискретный спектр,  $\partial_t \lambda_n = 0$ , в то время как  $\rho_n(t)$  и  $r(\xi, t)$  эволюционируют как Фурье-гармоники в теории линейных волн. Эти свойства позволяют фундаментально решить начальную задачу Коши для НУШ, найдя данные рассеяния из решения задачи рассеяния, вычислив ее эволюцию во времени и восстановив потенциал  $\psi$  с помощью обратного преобразования рассеяния.

Подобно спектру Фурье в теории линейных волн, данные рассеяния могут быть использованы для характеристики потенциала  $\psi(x, t)$ : коэффициент отражения  $r(\xi, t)$ , представляющий непрерывный спектр  $\lambda = \xi \in \mathbb{R}$ , описывает нелинейно-дисперсионные волны, а дискретные собственные значения  $\lambda_n$  вместе с коэффициентами  $\rho_n(t)$  соответствуют солитонам. В частности, собственные значения  $\lambda_n = \xi_n + i\eta_n$  содержат информацию об (инвариантных во времени) солитонных амплитудах  $a_n = 2\eta_n$  и скоростях  $v = -2\xi_n$ , а коэффициенты  $\rho_n(t)$  – об их (эволюционирующем) положении в пространстве и комплексной фазе. Односолитонное решение имеет следующий вид,

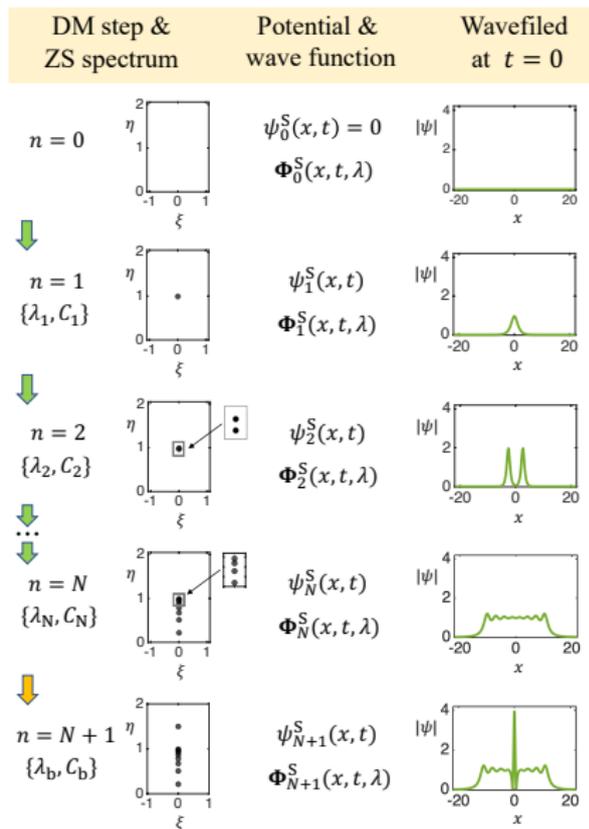
$$\psi_1^S(x, t) = a_1 \frac{\exp \left[ i v_1 (x - x_1) + \frac{i(a_1^2 - v_1^2)t}{2} + i\theta_1 \right]}{\cosh a_1 (x - v_1 t - x_1)},$$

где  $a_1 = 2\eta_1$  и  $v_1 = -2\xi_1$  – амплитуда и скорость солитона.

## 2. Интегрируемость и солитоны

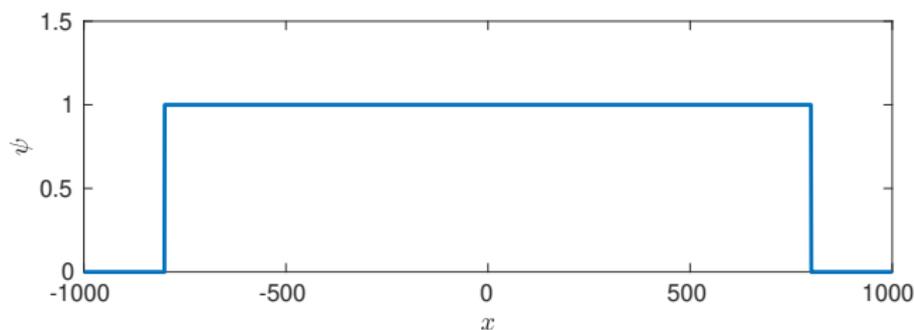
В работе A.A. Gelash, D.S. Agafontsev, Phys. Rev. E **98**, 042210 (2018), мы разработали метод численного моделирования много-солитонных волновых полей. Этот метод основан на так называемом методе одевания (DM), также известном как преобразование Дарбу, который представляет собой упрощенную версию традиционного подхода IST.

DM начинается с начального фонового потенциала  $\psi_0(x, t)$  (затравочное решение) и соответствующего  $2 \times 2$  матричного решения  $\Phi_0(x, t, \lambda)$  системы ЗШ (волновая функция). На  $n$ -ом шаге рекурсивной процедуры потенциал  $\psi_n$  и волновая функция  $\Phi_n$ , одетые  $n$  солитонами  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , получают алгебраическим преобразованием из  $\psi_{n-1}$  и  $\Phi_{n-1}$ , одетых  $(n-1)$  солитонами  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}\}$ . Это алгебраическое преобразование зависит от собственного значения  $n$ -ого солитона  $\lambda_n$  и определяется с точностью до произвольной константы  $C_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , которую мы называем нормирующей константой.



### 3. Солитонные модели МН: асимптотическое состояние

В работе A. Gelash, D. Agafontsev, V. Zakharov, G. El, S. Randoux, P. Suret, Phys. Rev. Lett. **123**, 234102 (2019), мы использовали наш метод для исследования МН в приближении солитонного газа.



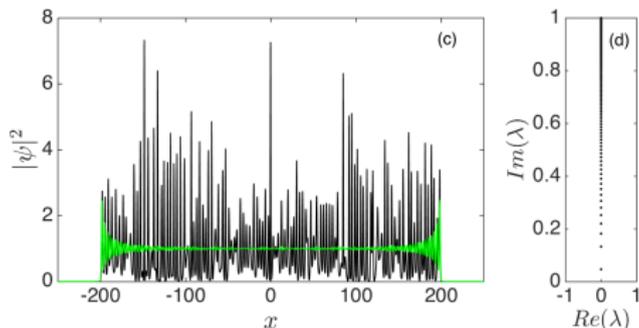
Для волнового поля в виде прямоугольного ящика единичной амплитуды  $\psi = 1$  и ширины  $L$ , прямая задача рассеяния была решена в работе S.V. Manakov, Sov. Phys. JETP **38**, 693 (1974). Это поле содержит  $N = \text{Int}[L/\pi + 1/2]$  солитонов нулевой скорости и с собственными значениями IST

$$\left\{ \{\lambda_n\} = \{i\eta_n\} \mid \tan(L\sqrt{1-\eta_n^2}) = -\frac{\sqrt{1-\eta_n^2}}{\eta_n}, \quad 0 < \eta_n < 1, \quad n = 1, \dots, N \right\},$$

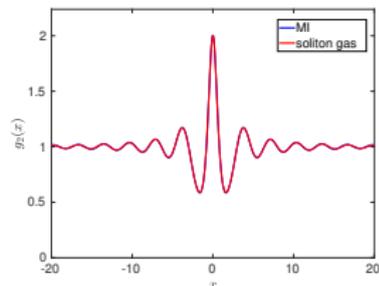
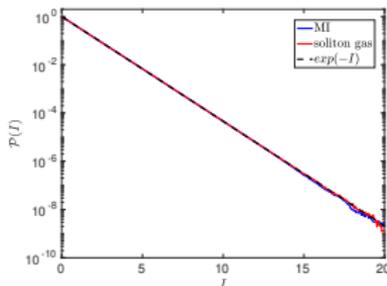
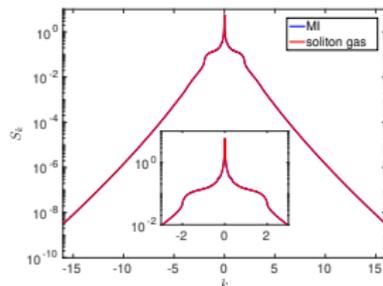
При большом числе солитонов распределение мнимых частей их собственных значений приближается к распределению Вейла,  $\rho(\eta) = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}$ .

### 3. Солитонные модели МН: асимптотическое состояние

Мы поместили солитоны в центр ящика  $x_n \in (-2, 2)$ , приписали им случайные фазы  $\theta_n \in [0, 2\pi)$  и сравнили статистику этого солитонного газа в центральных 70% решения со статистикой асимптотического состояния МН. Зеленая линия показывает среднюю интенсивность  $I(x) = \langle |\psi(x)|^2 \rangle$ .



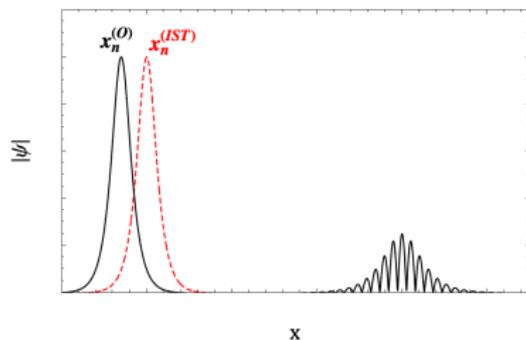
Результаты продемонстрировали практически точное совпадение!



### 3. Солитонные модели МН: начальное состояние

В работе A. Gelash, D. Agafontsev, P. Suret, S. Randoux, Phys. Rev. E. **104**, 044213 (2021), мы сделали следующий шаг и нашли солитонную модель для решения в виде плоской волны. Данные рассеяния для коробчатого потенциала также содержат непрерывный спектр, поэтому мы начали со статьи Манакова 1974 года и создали волновое поле, используя только солитонную часть спектра, игнорируя непрерывный спектр. Однако нам пришлось внести определенные поправки в нормировочные константы, возникающие из-за отсутствия непрерывного спектра.

Рассмотрим потенциал, содержащий один солитон  $\{\lambda_1, \rho_1\}$  вместе с нелинейным излучением, характеризуемым коэффициентом отражения  $r(\xi, t)$ . Предположим, что в физическом пространстве солитон расположен слева, излучение – справа, и обе структуры локализованы и удалены друг от друга. Если теперь построить новый потенциал, содержащий только солитон, то его положение будет сдвинуто относительно наблюдаемого положения солитона исходного решения. Этот сдвиг зависит от того, работаем ли мы в рамках задачи рассеяния правого или левого типа, поэтому мы предположили, что он не является физическим и должен быть компенсирован при построении потенциала без коэффициента отражения.

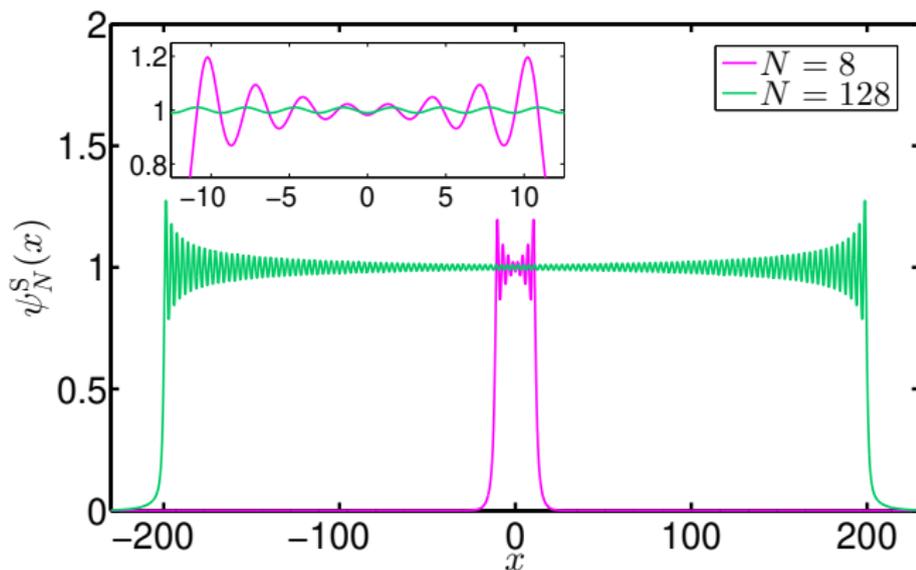


### 3. Солитонные модели МН: начальное состояние

Для собственных значений, отсортированных в порядке убывания,  $\eta_m < \eta_l$  для  $m > l$ , нормировочные константы принимают следующий простой вид,

$$C_n = e^{i\pi n},$$

и соответствуют солитонам, находящимся в начале координат  $x_n = 0$  с фазами  $\theta_n = \pi(n - 1)$ . Наименьшие остаточные колебания наблюдаются при  $L = \pi(N - 1/4)$ .



### 3. Солитонные модели МН: кноидальные волны

В работе T. Congy, G.A. El, G. Roberti, A. Tovbis, arXiv:2208.04472 (2022), была найдена плотность состояний для солитонных конденсатов рода 1,

$$f(\eta) = \frac{\eta^2 - w^2}{\pi \sqrt{(\eta_2^2 - \eta^2)(\eta^2 - \eta_1^2)}}, \quad w^2 = \eta_2^2 \left(1 - \frac{E(m)}{K(m)}\right), \quad m = \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2},$$

где  $\eta_1$  и  $\eta_2 > \eta_1$  – функции от  $\omega_0$  и  $\omega_1$ , а  $E(m)$  и  $K(m)$  – полные эллиптические интегралы второго и первого рода соответственно,

$$E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - m \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta, \quad K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - m \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta.$$

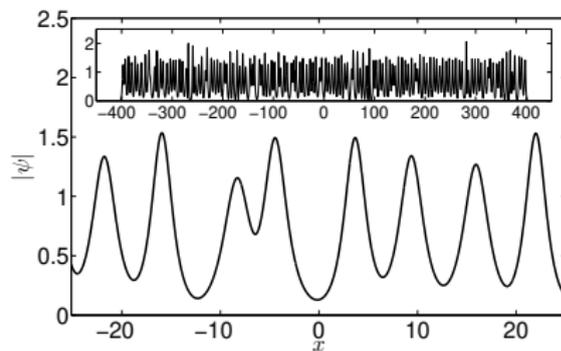
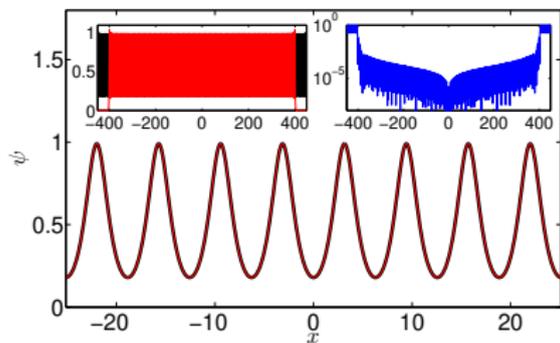
Теперь мы создадим многосолитонные решения, содержащие  $N$  солитонов, используя нормализованную плотность собственных значений  $p(\eta) = \text{const} \times f(\eta)$ ,  $\int_{\eta_1}^{\eta_2} p(\eta) d\eta = 1$ , чтобы найти собственные значения солитонов  $\lambda_n = i\eta_n$ ,

$$\int_{\eta_{n+1}}^{\eta_n} p(\eta) d\eta = \frac{1}{N} \text{ for } n = 1, \dots, N-1, \quad \int_{\beta_1}^{\eta_N} p(\eta) d\eta = \int_{\eta_1}^{\beta_2} p(\eta) d\eta = \frac{1}{2N}.$$

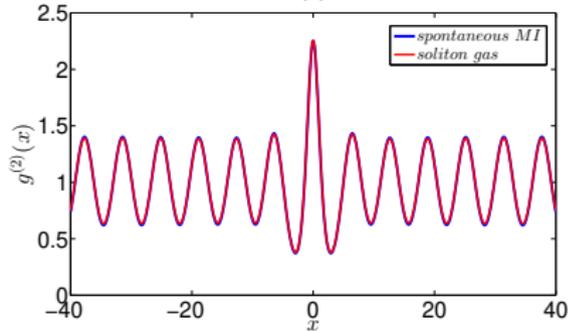
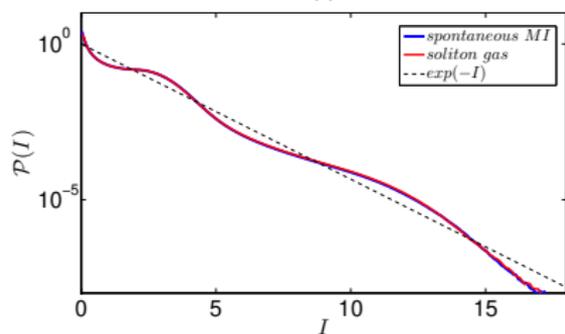
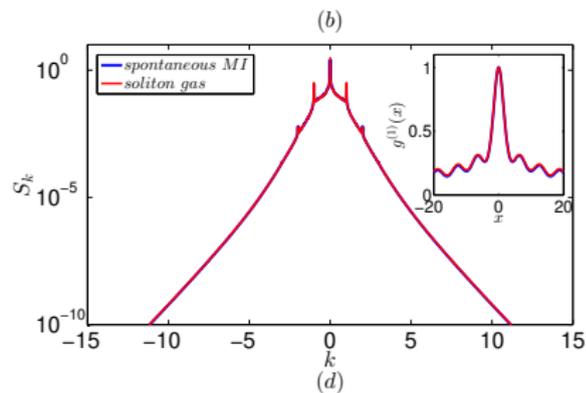
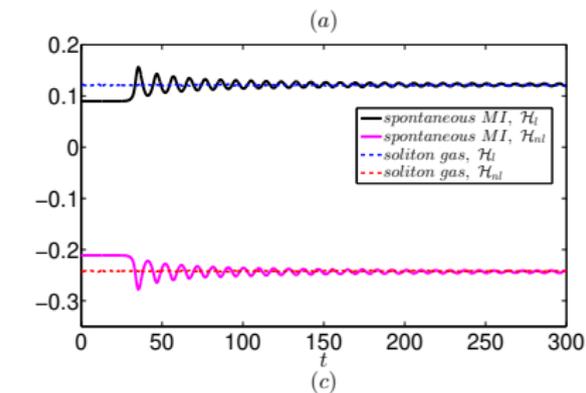
Затем этим солитонам присваиваем либо нулевые положения и фазы  $\{0, \pi, 0, \pi, \dots\}$ , либо случайные положения в центре ящика  $x_n \in (-2, 2)$  и случайные фазы  $\theta_n \in [0, 2\pi)$ .

### 3. Солитонные модели МН: кноидальные волны

В первом случае мы получаем солитонную модель невозмущенной кноидальной волны. Во втором случае мы получаем солитонную модель асимптотического статистически стационарного состояния, развивающегося из МН таких кноидальных волн.



### 3. Солитонные модели МН: кноидальные волны



### 3. Солитонные модели МН: кноидальные волны

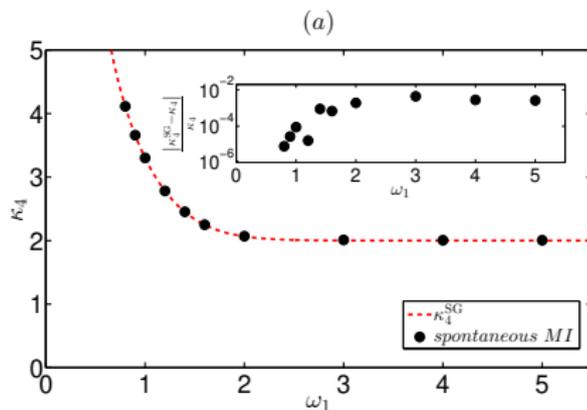
Теперь можно использовать результаты кинетической теории солитонного газа: G.A. El, A.M. Kamchatnov, *Phys. Rev. Lett.* 95, 204101 (2005), G.A. El, A. Tovbis, *Phys. Rev. E* 101, 052207 (2020), G.A. El, *J. Stat. Mech. Theory Exp.* 2021, 114001 (2021).

Согласно этой теории, можно вычислить среднее по ансамблю потока  $p_3 = |\psi|^4 - 2|\psi_x|^2$ , который для солитонного газа в связанном состоянии (т.е. когда солитоны имеют нулевые скорости и случайные фазы) равен нулю,  $\langle p_3 \rangle = 0$ . Отсюда можно найти асимптотическое соотношение энергий,  $H_{nl}/H_l = -2$ .

Найдя другие потоки, можно вычислить куртозис  $\kappa_4 = \langle |\psi|^4 \rangle / \langle |\psi|^2 \rangle^2$  аналитически в приближении солитонной модели,

$$\kappa_4 = 2 \frac{\eta_1^4 + \frac{2}{3}\eta_2^2\eta_1^2 + \eta_2^4 - \frac{4}{3}(\eta_1^2 + \eta_2^2)w^2}{[\eta_1^2 + \eta_2^2 - 2w^2]^2},$$

и сравнить его с нашим численным моделированием.



### 3. Солитонные модели МН: кноидальные волны

Применим нашу солитонную модель для анализа временных колебаний в нелинейной стадии МН. В нашей модели позиции солитонов не эволюционируют, а их фазы вращаются с несоизмеримыми частотами,

$$\theta_n(t) = \theta_{n0} + 2\eta_n^2 t.$$

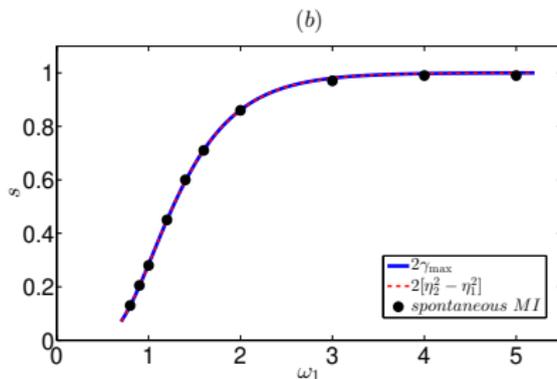
Большинство солитонов имеют собственные значения близкие либо к  $i\eta_1$ , либо к  $i\eta_2$ , так что если в момент времени  $t$  группы  $i\eta_1$  и  $i\eta_2$  имеют определенный совместный набор фаз, то в момент времени  $t + \Delta T$ ,

$$(2\eta_2^2 - 2\eta_1^2)\Delta T = 2\pi,$$

они будут иметь такой же набор фаз. Это соответствует колебаниям с частотой

$$s^{\text{SG}} = \frac{2\pi}{\Delta T} = 2[\eta_2^2 - \eta_1^2] \equiv 2\gamma_{\text{max}},$$

что равно *аналитически* двойному максимальному инкременту МН,  $2\gamma_{\text{max}}$ .



### 3. Солитонные модели МН: заключения

1. Разработаны солитонные модели для (i) начального и (ii) асимптотического состояний модуляционной неустойчивости.
2. С помощью этих моделей мы объяснили соотношение энергий  $H_{nl}/H_l = -2$  и нашли куртозис  $\kappa_4$  в асимптотическом стационарном состоянии. Также мы объяснили природу колебаний в нелинейной стадии МН и нашли их частоту.
3. Текущая работа: разработать полную солитонную модель модуляционной неустойчивости, описывающую этот процесс от начального состояния кноидальной волны плюс шум до конечного асимптотического стационарного состояния.

- D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Integrable turbulence and formation of rogue waves*, Nonlinearity **28**, 2791–2821 (2015).
- D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Intermittency in generalized NLS equation with focusing six-wave interactions*, Phys. Lett. A **379**, 2586–2590 (2015).
- D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Integrable turbulence generated from modulational instability of cnoidal waves*, Nonlinearity **29**, 3551–3578 (2016).
- A.A. Gelash, D.S. Agafontsev, *Strongly interacting soliton gas and formation of rogue waves*, Phys. Rev. E **98**, 042210 (2018).
- A. Kraych, D.S. Agafontsev, S. Randoux, P. Suret, *Statistical properties of nonlinear stage of modulation instability in fiber optics*, Phys. Rev. Lett. **123**, 093902 (2019).
- A. Gelash, D. Agafontsev, V. Zakharov, G. El, S. Randoux, P. Suret, *Bound state soliton gas dynamics underlying the noise-induced modulational instability*, Phys. Rev. Lett. **123**, 234102 (2019).
- D.S. Agafontsev, V.E. Zakharov, *Growing of integrable turbulence*, Low Temp. Phys. **46**, iss. 8, 786–791 (2020).
- D.S. Agafontsev, S. Randoux, P. Suret, *Extreme rogue wave generation from narrowband partially coherent waves*, Phys. Rev. E **103**, 032209 (2021).
- D.S. Agafontsev, A.A. Gelash, *Rogue waves with rational profiles in unstable condensate and its solitonic model*, Front. Phys. **9**, 610896 (2021).

## Библиография

- A. Gelash, D. Agafontsev, P. Suret, S. Randoux, *Solitonic model of the condensate*, Phys. Rev. E. **104**, 044213 (2021).
- D.S. Agafontsev, A.A. Gelash, R.I. Mullyadzhyanov and V.E. Zakharov, *Bound-state soliton gas as a limit of adiabatically growing integrable turbulence*, Chaos Solitons Fractals **166**, 112951 (2023).
- D.S. Agafontsev, A.A. Gelash, S. Randoux, P. Suret, *Multisoliton interactions approximating the dynamics of breather solutions*, Stud. Appl. Math. **152**, 810–834 (2024).
- P. Suret, S. Randoux, A. Gelash, D. Agafontsev, B. Doyon, G. El, *Soliton gas: Theory, numerics, and experiments*, Phys. Rev. E **109**, 061001 (2024).